Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 173

Heft 2

Ausgegeben den 5. Juni 1935

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1935

Band 173. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Kober, H., Transformationen einer bestimmten Besselschen Reihe sowie von Potenzen der Riemannschen ζ-Funktion und von verwandten Funktionen 65

Kapferer, Heinrich, Eliminanten bei Gleichungssystemen zweier Variabeln 79

Haenzel, G., Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz in ihrer Beziehung zu den quadratischen Cremonatransformationen und den Differentialgleichungen erster Ordnung 91

Holzer, L., Takagische Klassenkörpertheorie, Hassesche Reziprozitätsformel und Fermatsche Vermutung 114

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10
Printed in Germany

Transformationen einer bestimmten Besselschen Reihe sowie von Potenzen der Riemannschen ζ-Funktion und von verwandten Funktionen.

Von *H. Kober* in Breslau.

Herr Wilton[1]) hat sehr bemerkenswerte approximierte Funktionalgleichungen für die Funktionen

$$\sum_{n=1}^{x} d(n)\, e^{2\pi i n v} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{x} d(n)\, n^{-1}\, e^{2\pi i n v},$$

wo $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n bedeutet, bewiesen und hieraus einen neuen Beweis für Ergebnisse von Chowla und von Walfisz gewonnen, sowie noch einige neue Resultate abgeleitet, insbesondere für rationale Werte von v.

Nun haben aber, wie hier gezeigt werden wird, — es bedeute, wie üblich, $\sigma_\alpha(n)$ die Summe der α-ten Potenzen der Teiler von n, also $\sigma_0(n) = d(n)$ — die Funktionen

$$\mathsf{Z}_1(s; v; w) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2w}(n)\, n^{-s-w} \cos 2\pi v n\,, \qquad \mathsf{Z}_2(s; v; w) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2w}(n)\, n^{-s-w} \sin 2\pi v n\,,$$

welche zunächst für $\Re(s) > 1 + |\Re(w)|$ bei reellem v definiert sind, recht einfache analytische Eigenschaften für rationale Werte von v. Es sei $v = \frac{a}{c}$ mit teilerfremden a und c, dann sind

$$\mathsf{Z}_1(s; v; w)\,(s - w - 1)\,(s + w - 1) \quad \text{und} \quad \mathsf{Z}_2(s; v; w)$$

ganze Funktionen beider Variablen s und w, außerdem gelten die Funktionalgleichungen

$$(1) \qquad \mathsf{Z}_1(s; v; w)\, \Gamma\Big(\frac{s-w}{2}\Big)\, \Gamma\Big(\frac{s+w}{2}\Big)\, \Big(\frac{\pi}{c}\Big)^{-s}$$
$$= \mathsf{Z}_1(1-s; v'; w)\, \Gamma\Big(\frac{1-s-w}{2}\Big)\, \Gamma\Big(\frac{1-s+w}{2}\Big)\, \Big(\frac{\pi}{c}\Big)^{s-1},$$

$$(1') \qquad \mathsf{Z}_2(s; v; w)\, \Gamma\Big(\frac{1+s-w}{2}\Big)\, \Gamma\Big(\frac{1+s+w}{2}\Big)\, \Big(\frac{\pi}{c}\Big)^{-s}$$
$$= \mathsf{Z}_2(1-s; v'; w)\, \Gamma\Big(\frac{2-s-w}{2}\Big)\, \Gamma\Big(\frac{2-s+w}{2}\Big)\, \Big(\frac{\pi}{c}\Big)^{s-1},$$

wenn $v' = \frac{a'}{c}$ ist und hier a' irgendeine Lösung der Kongruenz $aa' \equiv 1 \pmod{c}$ bedeutet. Im Falle $w = 0$ werden diese Gleichungen etwas einfacher,

$$\mathsf{Z}_1(s; v; 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)\, n^{-s} \cos 2\pi v n$$

[1]) An approximate functional equation with applications to a problem of Diophantine approximation, Journ. f. Math. **169** (1933), S. 219 ff. — Die Bezeichnung ist hier geändert.

hat an der Stelle $s = 1$ einen Doppelpol. Herr Wilton hat seine für rationale Werte von v erhaltenen Ergebnisse noch auf einem anderen Wege verbessert, nämlich durch Verwendung eines Resultats von Ramanujan. Diese Wiltonschen Ergebnisse folgen nun, aber eben nur für rationales v, unschwer aus den analytischen Eigenschaften der Funktionen Z_1 und Z_2 durch bekannte Sätze über Dirichletsche Reihen, ferner auch eine bei Herrn Wilton noch nicht ganz vorkommende Verallgemeinerung der bekannten Dirichletschen Teilerformel,

$$\sum_{n=1}^{x} d(n) \cos 2\pi v n = \frac{1}{c}\, x \log x + \frac{1}{c}\, x(2\gamma - 2\log c - 1) + O(x^{\frac{1}{3}} \log x)\,,$$

in der das Fehlerglied sicher noch verschärft werden kann.

Der Beweis der analytischen Eigenschaften der Funktionen Z_1 und Z_2 kann auf ziemlich elementarem Wege durch Anwendung der Eigenschaften der Funktion $\zeta(s; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)^{-s}$ geführt werden; dieser Beweisgang soll an der Funktion Z_2 kurz gezeigt werden. Er kann außerdem durch Anwendung des klassisch gewordenen Riemannschen Verfahrens geführt werden, nur tritt an Stelle der gewöhnlichen Thetareihe eine neue, nämlich eine bestimmte Besselsche Reihe; dieser Beweisgang soll hier an der Funktion Z_1 durchgeführt werden. Das ist der Inhalt des zweiten Teiles der vorliegenden Arbeit.

Diese Bessel-Thetareihe weist nämlich ein auffallend analoges Verhalten zu dem der gewöhnlichen Thetareihe auf. Es sei $K_w(z)$ eine Besselsche Funktion zweiter Art oder nach Whittaker and Watson [2]) die „modifizierte" Besselsche Funktion zweiter Art ohne den dort auftretenden Faktor $\cos \pi\omega$, so ist von mir bewiesen worden [3]):

Es sei $u > 0$, v beliebig reell, w komplex $\neq \pm \frac{1}{2}$. Dann ist bei festem u, v

$$\text{(2a)}\quad \Theta(u, v, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2w}(n)\, n^{-w} \cos 2\pi v n\; K_w(2\pi u n) + \frac{u^w\, \Gamma(w + \frac{1}{2})\, \zeta(2w+1)}{4\pi^{w+\frac{1}{2}}} + \frac{u^{-w}\, \Gamma(w)\, \zeta(2w)}{4\pi^w}$$

eine im endlichen reguläre Funktion von w, die an den Stellen $w = \pm \frac{1}{2}$ einfache Pole hat.

Es seien ferner $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige ganze Zahlen, die der Bedingung $\alpha\delta - \gamma\beta = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, genügen, es sei ferner $z = v + iu$, $z^* = v^* + i\varepsilon u^*$, u^* und v^* reell, $\sqrt{u}$ und $\sqrt{u^*}$ positiv gewählt und

$$\text{(2a')}\qquad z^* = \frac{\delta z + \beta}{\gamma z + \alpha}.\quad \text{Dann ist } \sqrt{u}\, \Theta(u, v, w) = \sqrt{u^*}\, \Theta(u^*, v^*, w).$$

Der Geltungsbereich dieser Transformationsformel soll nun hier, was übrigens für den zweiten Teil nicht gebraucht wird, erweitert werden. Weder u und v, noch u^* und v^* brauchen reell zu sein, also weder z und $\tilde{z}$ konjugiert komplex zueinander, noch z^* und $\tilde{z}^*$, wenn

$$\tilde{z} = v - iu\,, \qquad \tilde{z}^* = v^* - i\varepsilon u^*$$

gesetzt wird. Es seien nur die Bedingungen

$$\Im(z) > 0, \quad \Im(\tilde{z}) < 0, \quad z^* = \frac{\delta z + \beta}{\gamma z + \alpha}, \quad \tilde{z}^* = \frac{\delta \tilde{z} + \beta}{\gamma \tilde{z} + \alpha}, \quad w \neq \pm \frac{1}{2}$$

erfüllt. Dann ist $\Theta(u, v, w)$ im Endlichen eine reguläre Funktion von u, v und w, und

$$\sqrt{u}\, \Theta(u, v, w) = \sqrt{u^*}\, \Theta(u^*, v^*, w),$$

---

[2]) A course of modern analysis, Cambridge 1920, S. 340 ff.

[3]) Transformationsformeln gewisser Besselscher Reihen, Beziehungen zu Zeta-Funktionen, Math. Zeitschr. **39** (1935), S. 609—624.

und die Wurzeln können und sollen hier so bestimmt werden, daß ihre Werte im Winkelraum $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ liegen. Das soll der Inhalt des ersten Teiles der Arbeit sein.

Aus einer bei Herrn Watson [4]) auftretenden Transformationsformel einer gewissen Besselschen Reihe, die dort mit Hilfe der Poissonschen Summenformel hergeleitet wird, kann man durch Umstellung und kurze Rechnung folgende Gleichung gewinnen:

Es sei $\Re(u) > 0$, $s = \sigma + it$, $\sigma > -1$. Dann ist [5])

$$(5') \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n^2+u^2)^{\frac{s}{2}}}\right) + \frac{2\pi^{\frac{s}{2}}\, u^{\frac{1-s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{s-1}{2}}\, K_{\frac{s-1}{2}}(2\pi n u) - \frac{u^{-s}}{2} + \frac{u^{1-s}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Die zweite auf der rechten Seite auftretende unendliche Reihe konvergiert, falls $\Re(u)$ nicht zu klein gewählt ist, sehr rasch. An dieser Formel ist bemerkenswert nicht bloß, daß sie für $\sigma > -1$ gilt, also in einem Gebiete, das den kritischen Streifen enthält, sondern auch, daß hier $\zeta(s)$ mit Hilfe eines nur durch die Einschränkung $\Re(u) > 0$ begrenzten, sonst aber ganz willkürlichen Parameters dargestellt ist. Bei der Bedeutung aber, welche die Untersuchung von Potenzen der Riemannschen ζ-Funktion im Innern und auf den Grenzen des kritischen Streifens für Fragen der Größenordnung [6]) hat, ist es vielleicht nicht ganz ohne Belang, eine entsprechende Darstellung für die Funktion $\zeta^h(s)$ im Gebiete $\sigma > -1$, wenn h ganz und > 0, mit Hilfe eines Parameters u zu finden (s. Formel 5). An die Stelle der Besselschen Funktion K_w tritt dann allerdings eine allgemeinere Funktion, die zwar einer linearen Differentialgleichung $2h$-ter Ordnung genügt, aber wesentliche Eigenschaften mit ihr gemeinsam und auch sonst ganz einfache, leicht zu überschauende Eigenschaften hat. Das ist der Inhalt des dritten Teiles der vorliegenden Arbeit.

I. Die Bessel-Thetareihe.

Da die Variablen u und v zunächst reell angenommen werden und $z = v + iu$, $z^* = v^* + i\varepsilon u^*$, $\varepsilon = \alpha\delta - \gamma\beta = \pm 1$ ist, erkennt man durch Trennung des reellen und imaginären Teiles, daß die Transformation

$$(2b) \qquad z^* = \frac{\delta z + \beta}{\gamma z + \alpha}$$

äquivalent ist mit den beiden Transformationsgleichungen

$$(2c) \quad u^* = \frac{u}{\alpha^2 + 2\alpha\gamma v + \gamma^2(u^2+v^2)}, \qquad v^* = \frac{\alpha\beta + v(\alpha\delta+\gamma\beta) + \gamma\delta(u^2+v^2)}{\alpha^2 + 2\alpha\gamma v + \gamma^2(u^2+v^2)}.$$

Da $\tilde{z} = v - iu$, $\tilde{z}^* = v^* - i\varepsilon u^*$ ist, so ist, wenn die Größen u und v reell sind, die Transformationsformel

$$(2b') \qquad \tilde{z}^* = \frac{\delta\tilde{z} + \beta}{\gamma\tilde{z} + \alpha}$$

ebenfalls mit den Gleichungen (2c) äquivalent.

---

[4]) Some self-reciprocal functions, Quarterly Journal (Oxford series) **2** (1931), S. 300.

[5]) Siehe auch H. Kober, l. c. Anm. [3]).

[6]) S. z. B. Titchmarsh, The zeta-function of Riemann, Cambridge 1930, Chapter VI: Lindelöfs Hypothesis. Für verwandte Funktionen: Titchmarsh, On an inequality satisfied by the zeta-function of Riemann, Proc. London Math. Soc. (2) **28** (1929), S. 70—80.

Wenn jetzt u und v beliebig komplex sind, so folgt aus den beiden Gleichungen (2c) sowohl die Gleichung (2b) wie (2b'), und umgekehrt folgt aus dem Gleichungspaar (2b, b') das Gleichungspaar (2c), also ist die Transformation (2c) identisch mit der Doppeltransformation (2b, b'). Da nun $\Im(z) = \Im(v) + \Re(u)$, $\Im(\tilde{z}) = \Im(v) - \Re(u)$ ist, so sind die Bedingungen $\Im(z) > 0$, $\Im(\tilde{z}) < 0$ zusammen gleichbedeutend mit der Bedingung $|\Im(v)| < \Re(u)$, und $\Im(z) \geqq \delta_1 > 0$, $\Im(\tilde{z}) \leqq -\delta_1 < 0$ zusammen gleichwertig mit der Bedingung $\Re(u) - |\Im(v)| \geqq \delta_1 > 0$. Entsprechendes gilt für die Größen $z^*, \tilde{z}^*, u^*, v^*$, nur daß im Falle $\varepsilon = -1$ man $\Im(z^*) < 0, \Im(\tilde{z}^*) > 0$ voraussetzt. Es sei zunächst $\varepsilon = +1$. Dann ist aus der Theorie der linearen Transformationen bekannt: Wenn $\Im(z) \geqq \delta_1 > 0$, $\Im(\tilde{z}) \leqq -\delta_1 < 0$, ferner $|z| < A$, $|\tilde{z}| < A$, dann gibt es zwei positive, von 0 und ∞ verschiedene Zahlen δ_1^* und A^* so, daß

$$\Im(z^*) \geqq \delta_1^* > 0, \quad \Im(\tilde{z}^*) \leqq -\delta_1^* < 0, \quad |z^*| < A^*, |\tilde{z}^*| < A^*.$$

Falls $\varepsilon = -1$ ist, so ist $\Im(z^*) \leqq -\delta_1^*$, $\Im(\tilde{z}^*) \geqq \delta_1^*$, $|z^*| < A^*$, $|\tilde{z}^*| < A^*$. Geometrisch ist das alles ohne weiteres einleuchtend. — Da $\Re(u) > 0$, so ist die Summe der beiden letzten Glieder in der Gleichung (2a) eine — auch an der Stelle $w = 0$ — im Endlichen reguläre Funktion von w mit zwei einfachen Polen für $w = \pm \frac{1}{2}$ und eine im Endlichen reguläre Funktion von u, wenn man $-\frac{\pi}{2} < \Im(\log u) < \frac{\pi}{2}$ festsetzt und $u^{\pm w} = e^{\pm w \log u}$ nimmt. An der Stelle $w = 0$ läßt sich die Funktion Θ in die Form bringen:

$$\Theta(u, v, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \cos 2\pi v n \, K_0(2\pi u n) + \frac{1}{4} \log \frac{u e^{\gamma}}{4\pi}, \tag{2d}$$

wenn γ die Eulersche Konstante bedeutet, und zwar mit Hilfe des Grenzprozesses $w \to 0$. Nun ist [7]) für $\Re(z) \geqq a > 0$ sicher bei festem w

$$K_w(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right), \quad \text{also} \quad |K_w(z)| < C e^{-\Re(z)}, \tag{2e}$$

also

$$|\cos 2\pi v n \, K_w(2\pi u n)| < C e^{-2\pi n(\Re(u) - |\Im(v)|)},$$

ferner ist

$$\sigma_{2w}(n)\, n^{-w} = \sum_{m_1 m_2 = n} \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^w = O(n^{|\Re(w)| + \varepsilon_1}) \quad \text{für jedes } \varepsilon_1 > 0,$$

also, wenn man $\Re(u) - |\Im(v)| \geqq \delta_1 > 0$ annimmt, die unendliche in Gleichung (2a) auftretende Reihe gleichmäßig in u und ebenso in v konvergent, und da die Abschätzung (2e) auch gleichmäßig in w für $|w| < C_2$ gilt, ist $\Theta(u, v, w)$ für endliche Gebiete von u, v, w eine reguläre Funktion sowohl von u, v wie von w im Bereiche $\Im(z) > 0$, $\Im(\tilde{z}) < 0$, $w \neq \pm \frac{1}{2}$, also eine reguläre Funktion aller drei Variablen u, v, w. Dasselbe gilt auf Grund des oben über die lineare Transformation Gesagten für die Funktion $\Theta(u^*, v^*, w)$, wenn u, v, w einem solchen endlichen sechsdimensionalen Bereiche der eben festgelegten Art angehören und der Bereich von u^*, v^* auf Grund der Transformationsformeln (2b, b') oder (2c) begrenzt wird. Denkt man sich in dem Ausdruck für die Funktion $\sqrt{u^*}\,\Theta(u^*, v^*, w)$ die Größen u^* und v^* durch ihre in u und v rationalen, in diesem Bereiche regulären Darstellungen (2c) ersetzt, so wird

$$\sqrt{u^*}\,\Theta(u^*, v^*, w) = F(u, v, w)$$

eine in diesem Bereiche reguläre Funktion von u und v. Nun ist aber, wie bewiesen worden

---

[7]) S. z. B. Whittaker and Watson, l. c. Anm. [2]).

ist [8]), für endliches $w \neq \pm \frac{1}{2}$

$$\sqrt{u}\,\Theta(u, v, w) = F(u, v, w) \tag{2f}$$

für alle reellen Werte von v und alle positiven von u, und dieser Bereich ist sicher, wenn man u und v endlich annimmt, in dem vorigen enthalten.

Daher [9]) gilt die Gleichung (2f) und somit auch die Gleichung

$$\sqrt{u}\,\Theta(u, v, w) = \sqrt{u^*}\,\Theta(u^*, v^*, w)$$

in dem ganzen Bereiche $\Im(z) > 0$, $\Im(\tilde{z}) < 0$, $w \neq \pm \frac{1}{2}$, für endliche Werte von u, v (oder z, $\tilde{z}$) und w.

Die Funktion $\Theta(u, v, w)$ ist eine gerade Funktion von v und, auf Grund der Funktionalgleichung der ζ-Funktion und der Gleichung $\sigma_{2w}(n)\, n^{-w} = \sum \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^w$, die oben erwähnt ist, auch von w. Im Falle $w = \pm \frac{1}{2}$ gilt für die in Gleichung (2a) auftretende Reihe, die allgemein mit ${}_1\Theta(u, v, w)$ bezeichnet werden soll, für reelle u, v:

$${}_1\Theta(u, v, \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{-1}(n)\, e^{-2\pi n u} \cos 2\pi n v = \frac{1}{2\sqrt{u}}\, \Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{-1}(n)\, e^{2\pi i n z}\right),$$

also ist $\sqrt{u}\,{}_1\Theta(u, v, \frac{1}{2})$ eine Potentialfunktion. — Θ kann natürlich als Funktion von z, $\tilde{z}$ und w aufgefaßt werden und hat, wie sich zeigen läßt, die reelle Achse sowohl der z- wie der $\tilde{z}$-Ebene zur natürlichen Grenze. Eine besonders einfache Gestalt nehmen die Transformationsformeln in dem speziellen Falle an, der allein für das Folgende gebraucht wird, daß nämlich v rational $= \frac{a}{c}$ ist mit $(a, c) = 1$. Ist nämlich a' eine Lösung der Kongruenz $aa' \equiv 1 \pmod{c}$ und setzt man

$$\alpha = -a, \quad \delta = a', \quad \gamma = c, \quad \beta = \frac{\alpha\delta + 1}{c}, \quad \text{so ist } \alpha\delta - \gamma\beta = -1;$$

aus den Formeln (2c) folgt sofort, wenn man $\frac{a'}{c} = v'$ setzt:

$$u^* = \frac{1}{uc^2}, \qquad v^* = \frac{a'}{c} = v'. \tag{2c'}$$

Eine weitere einfache Formel, die man zur Ableitung der Funktionalgleichung (1′) benutzen kann, erhält man, indem man die Gleichung $\sqrt{u}\,\Theta(u, v, w) = \sqrt{u^*}\,\Theta(u^*, v^*, w)$ unter Berücksichtigung der Gleichungen (2c) nach v differenziert und dann wieder $\alpha = -a$, $\delta = a'$, $\beta = \frac{\alpha\delta + 1}{c}$, $v = \frac{a}{c}$, $v' = \frac{a'}{c}$ setzt:

$$u\sqrt{u} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2w}(n)\, n^{1-w} \sin 2\pi n v\, K_w(2\pi n u) = u^*\sqrt{u^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2w}(n)\, n^{1-w} \sin 2\pi n v^*\, K_w(2\pi n u^*),$$

wenn hier u^* und v^* durch die Gleichungen (2c′) bestimmt sind.

II. Die Funktionen $\mathbf{Z}(s; v; w)$.

Es ist [10]), wenn $s = \sigma + it$ gesetzt wird, für $\sigma > |\Re(w)|$

$$\int_0^{\infty} du\; u^{s-1} K_w(2u) = \frac{1}{4}\, \Gamma\left(\frac{s - w}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s + w}{2}\right). \tag{3a}$$

---

[8]) Kober, l. c. Anm. [3]); siehe auch Einleitung, Gleichung (2a′).

[9]) Das erkennt man z. B. in zwei Schritten aus einem Fundamentalsatz über analytische Fortsetzung einer Funktion einer Variablen, indem man beim ersten Schritt u beliebig, aber positiv fest annimmt, beim zweiten Schritt v beliebig komplex.

[10]) Das folgt z. B. aus der bei Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922, S. 388 auftretenden Formel (8).

Hier ersetze ich die Größe u durch $\pi n u$, multipliziere mit $n^{-w}\sigma_{2w}(n)\cos 2\pi n v$ und summiere über n; so folgt für $\sigma > |\Re(w)| + 1$

$$(3)\qquad \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{s+w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-w}{2}\right)\pi^{-s}\,\mathsf{Z}_1(s;v;w) = \int_0^\infty du\, u^{s-1}\,{}_1\Theta(u,v,w),$$

wobei ${}_1\Theta$, wie schon angegeben, die unendliche Reihe bedeutet, die auf der rechten Seite der Gleichung (2a) auftritt. Denn aus der Gleichung (2e) folgt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe ${}_1\Theta$ in jedem Intervalle $0 < u_0 \leqq u \leqq U_0$; in einem solchen Intervalle ist daher die Summation mit der Integration vertauschbar. Wählt man die Größen s und w zunächst reell und $v = 0$, so wird die linke Seite gleich

$$\frac{\pi^{-s}}{4}\Gamma\left(\frac{s-w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+w}{2}\right)\zeta(s-w)\,\zeta(s+w),$$

und die hier entstehende Reihe konvergiert für $\sigma > 1 + |\Re(w)|$; auf der rechten Seite sind alle Elemente positiv, also ist nach einem allgemeinen Satze die Integration von 0 bis ∞ erlaubt. Nimmt man schließlich s und w komplex, v beliebig reell an und berücksichtigt, daß dann die absoluten Beträge der Elemente auf der rechten Seite nicht größer als die vorher aufgetretenen positiven Werte sind, so folgt die Richtigkeit von Gleichung (3); es ist nämlich:

$$|u^{s-1}| \leqq u^{\sigma-1};\ |\cos 2\pi v n| \leqq 1;\ \left|\frac{\sigma_{2w}(n)}{n^w}\right| \leqq \frac{\sigma_{2\Re(w)}(n)}{n^{\Re(w)}};\ K_w(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh wt\, dt,$$

also für $z > 0$:

$$|K_w(z)| \leqq K_{\Re(w)}(z).$$

Nun ist auf Grund der Gleichung (2a) und der Transformation (2c′)

$$(2g)\quad {}_1\Theta(u,v,w) = \frac{1}{cu}\,{}_1\Theta\left(\frac{1}{uc^2}, v', w\right) + \frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})\,\zeta(2w+1)}{4c^{2w+1}u^{w+1}\pi^{w+\frac{1}{2}}} + \frac{c^{2w-1}u^{w-1}\Gamma(w)\,\zeta(2w)}{4\pi^w} - \frac{u^w\Gamma(w+\frac{1}{2})\,\zeta(2w+1)}{4\pi^{w+\frac{1}{2}}} - \frac{u^{-w}\Gamma(w)\,\zeta(2w)}{4\pi^w},$$

wenn zunächst $w \neq 0, \neq \pm\frac{1}{2}$ ist. So folgt aus den Gleichungen (2g) und (3) für $\sigma > 1 + |\Re(w)|$:

$$\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{s-w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+w}{2}\right)\left(\frac{\pi}{c}\right)^{-s}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sigma_{2w}(n)}{n^{s+w}}\cos 2\pi v n$$

$$= c^s\int_{\frac{1}{c}}^\infty u^{s-1}\,{}_1\Theta(u,v,w)\,du + c^s\int_0^{\frac{1}{c}} u^{s-1}\,{}_1\Theta(u,v,w)\,du$$

$$(3b)\qquad = -\frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})\,\zeta(2w+1)}{4\pi^{w+\frac{1}{2}}c^w}\left(\frac{1}{s+w}+\frac{1}{1-s+w}\right) - \frac{\Gamma(w)\,\zeta(2w)\,c^w}{4\pi^w}\left(\frac{1}{s-w}+\frac{1}{1-s-w}\right)$$

$$+ c^s\int_{\frac{1}{c}}^\infty du\, u^{s-1}\,{}_1\Theta(u,v,w) + c^{1-s}\int_{\frac{1}{c}}^\infty du\, u^{-s}\,{}_1\Theta(u,v',w),$$

wobei in dem letzten Integral statt der Integrationsvariablen u die Größe $\frac{1}{c^2u}$ eingesetzt worden ist. Die beiden Integrale, die am Ende der Gleichung (3b) auftreten, sind aber auf Grund bekannter Sätze ganze Funktionen sowohl von s wie von w, da ja auch im Bereiche $|\Re(s)| < A$, $|\Re(w)| < B$ gleichmäßig $\lim\limits_{\mu=\infty}\int_\mu^\infty du\, u^{s-1}\,{}_1\Theta(u,v,w) = 0$ ist,

ebenso $\lim\limits_{\mu=\infty} \int\limits_{\mu}^{\infty} du\, u^{-s}\, {}_1\Theta(u, v', w) = 0$, weil

$$u \geqq \frac{1}{c}, \; |K_w(z)| < K_B(z) \text{ für } z > 0,$$

$$|{}_1\Theta| < \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2B}(n)\, n^{-B}\, K_B(2\pi un) < C \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2B}(n)\, n^{-B}\, e^{-2\pi un}.$$

Nun sind aber die Funktionen der Variablen w

$$\frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})\,\zeta(2w+1)}{4c^w\,\pi^{w+\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{s+w}+\frac{1}{1-s+w}\right), \quad \frac{c^w\,\Gamma(w)\,\zeta(2w)}{4\pi^w}\left(\frac{1}{s-w}+\frac{1}{1-s-w}\right),$$

deren Pole die Stellen $w = -s$, $w = s-1$, $w = 0$, scheinbar auch $w = -\frac{1}{2}$, bzw. $w = s$, $w = 1-s$, $w = 0$, scheinbar auch $w = +\frac{1}{2}$ sind, in Wirklichkeit an den Stellen $w = -\frac{1}{2}$ bzw. $w = +\frac{1}{2}$ regulär, ihre Summe ist sogar auch an der Stelle $w = 0$ regulär, da die Pole auf Grund bekannter Eigenschaften der ζ-Funktion sich aufheben. Daher ist

$$(s+w)\,(s-w)\,(1-s+w)\,(1-s-w)\,\Gamma\left(\frac{s-w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+w}{2}\right)\mathsf{Z}_1(s; v; w)$$

eine ganze Funktion sowohl der Variablen w wie der Variablen s, daher auch

$$(s+w-1)\,(s-w-1)\,\mathsf{Z}_1(s; v; w).$$

Da die rechte Seite der Gleichung (3b) auch ihren Wert nicht ändert, wenn man s durch $1-s$ und v durch v' ersetzt, folgt die Funktionalgleichung (1). — Zur Untersuchung der Funktion Z_2 soll der elementarere Weg gewählt werden. Es ist für $\sigma > 1 + |\Re(w)|$

$$\mathsf{Z}_2(s; v; w) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2w}(n)\, n^{-s-w} \sin 2\pi vn = \sum_{n=1,\, m=1}^{\infty} m^{-s-w}\, n^{-s+w} \sin 2\pi mnv = \mathsf{Z}_2(s; v; -w).$$

Da die Doppelreihe für $\sigma > |\Re(w)| + 1$ absolut konvergiert, darf man umordnen:

$$\mathsf{Z}_2(s; v; w) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s-w}\eta_2(s-w; mv) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} m\,|m|^{-s-w-1}\eta_2(s-w; mv).$$

Hierin bedeutet $\eta_2(z, \alpha)$ die Funktion

$$\eta_2(z; \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \sin 2\pi\alpha n,$$

so daß $\eta_2(z; -\alpha) = -\eta_2(z; \alpha)$ ist. Nun ist $\eta_2(z; \alpha)$ eine periodische Funktion von α mit der Periode 1; wenn $m \equiv m_1 (\mathrm{mod}\, c)$, unterscheiden sich aber $mv = \frac{ma}{c}$ und $m_1 v$ um eine ganze Zahl, daher ist

$$\mathsf{Z}_2(s; v; w) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{c}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' (m+cv)\,|m+cv|^{-s-w-1}\,\eta_2(s-w; mv)$$

$$= c^{-s-w}\sum_{m=1}^{c}\eta_1\left(s+w; \frac{m}{c}\right)\eta_2(s-w; mv)$$

wenn die Funktion η_1 folgende Bedeutung hat:

$$\eta_1(z; \alpha) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}'(\nu+\alpha)\,|\nu+\alpha|^{-z-1} = \frac{1}{2}\,\zeta(z; \alpha) - \frac{1}{2}\,\zeta(z; 1-\alpha).$$

Der Strich am Summenzeichen zeigt an, daß das Glied $\nu = -\alpha$ für $\alpha \equiv 0 \pmod 1$ wegbleibt, entsprechend in der oberen Summe das Glied $\nu = -1$, $m = c$; übrigens

ist für $\alpha \equiv 0$ und $\alpha \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$ identisch $\eta_1(z;\alpha) = 0$. Es sei nun $m' \equiv ma \pmod c$, $0 < m' \leqq c$, und wieder $aa' \equiv 1 \pmod c$; dann ist $mv - \dfrac{m'}{c} \equiv 0 \pmod 1$, folglich, da $\eta_1(z;1) = 0$ ist:

$$(3\,c) \qquad \mathsf{Z}_2(s;v;w) = c^{-s-w} \sum_1^{c-1} \eta_1\left(s+w;\frac{m}{c}\right)\eta_2\left(s-w;\frac{m'}{c}\right).$$

Hier durchlaufen sowohl m wie m' alle ganzen Zahlen von 1 bis $c-1$, aber voneinander abhängig durch die zueinander äquivalenten Beziehungen

$$m' \equiv ma \pmod c \quad \text{oder} \quad m \equiv m'a' \pmod c.$$

Da nun $\eta_1(z;\alpha)$ und $\eta_2(z;\alpha)$ ganze Funktionen von z sind [11]), ist $\mathsf{Z}_2(s;v;w)$ für rationale Werte von v eine ganze Funktion sowohl der Variablen w wie der Variablen s. Wenn ferner wieder $v' = \dfrac{a'}{c}$ ist, ist ebenso

$$(3\,c') \quad \mathsf{Z}_2(s;v';w) = c^{-s-w} \sum_1^{c-1} \eta_1\left(s+w;\frac{m_1}{c}\right)\eta_2\left(s-w;\frac{m_1'}{c}\right)$$

$$= c^{-s-w} \sum_1^{c-1} \eta_1\left(s+w;\frac{m'}{c}\right)\eta_2\left(s-w;\frac{m}{c}\right);$$

hier ist $m_1' \equiv m_1 a' \pmod c$ und daher $m_1 \equiv m_1' a \pmod c$, also konnte man $m_1' = m$ und $m_1 = m'$ setzen. Nun gilt aber [12]) die Funktionalgleichung

$$\pi^{-\frac{z+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\eta_1(z;\alpha) = \pi^{-\frac{2-z}{2}}\,\Gamma\left(\frac{2-z}{2}\right)\eta_2(1-z;\alpha).$$

Durch ihre zweimalige Anwendung erhält man schließlich aus den Gleichungen (3c) und (3c′) die Funktionalgleichung (1′).

Nun komme ich zu Herrn Wiltons Resultaten: Durch seine Methode hat Herr Wilton bewiesen, daß für rationale Werte von v

$$\sum_{n=1}^{x} d(n) \sin 2\pi vn = O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$$

ist. Zunächst folgt hier durch Anwendung einfachster Sätze über Dirichletsche Reihen etwas weniger: Da

$$\mathsf{Z}_2(s;v;0) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)\, n^{-s} \sin 2\pi vn = \sum_1^{c-1} \eta_2\left(s;\frac{m'}{c}\right) c^{-s}\,\eta_1\left(s;\frac{m}{c}\right)$$

und $\eta_2(z;\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sin 2\pi\alpha n$ eine für $\sigma > 0$ konvergente, für $\sigma > 1$ absolut konvergente Reihe ist, und da das Gleiche für die Reihe

$$c^{-s}\,\eta_1\left(s;\frac{m}{c}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\{(nc+m)^{-s} - (nc+c-m)^{-s}\}$$

bei dieser Anordnung der Glieder gilt, ist die durch *Dirichletsche Multiplikation* entstehende Dirichletsche Reihe für $c^{-s}\,\eta_1\left(s;\dfrac{m}{c}\right)\eta_2\left(s;\dfrac{m'}{c}\right)$ konvergent für $\sigma > \frac{1}{2}$ [13]), daher auch die als Summe von $c-1$ solchen Reihen dargestellte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d(n)\, n^{-s} \sin 2\pi vn$.

---

[11]) Whittaker and Watson, l. c. Anm. [2]), S. 267—275; die Bezeichnungen sind hier anders.

[12]) Whittaker and Watson, l. c. Anm. [2]).

[13]) S. z. B. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen II, Leipzig-Berlin 1909, §§ 212, 215.

Folglich ist nach einem bekannten Satze für jedes $\vartheta > \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{x} d(n) \sin 2\pi vn = O(x^{\vartheta}).$$

Durch eine ganz entsprechende Überlegung findet man für $\varepsilon > 0$, $\Re(w) = w_1$ das (wohl neue) Ergebnis: es ist, je nachdem $w_1 \leqq -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < w_1 < \frac{1}{2}$, $w_1 \geqq \frac{1}{2}$ ist,

$$\sum_{n=1}^{x} \sigma_{2w}(n) \sin 2\pi vn = O(x^{\varepsilon}) \quad \text{bzw.} \quad O(x^{w_1+\frac{1}{2}+\varepsilon}),\ O(x^{2w_1+\varepsilon}).$$

Aber man kann auch das von Herrn Wilton auf anderem Wege erhaltene, bessere Ergebnis durch unmittelbare Anwendung des sog. „Hauptsatzes" aus einer Abhandlung von Herrn Landau [14]) auf die Funktion Z_2 gewinnen, die, im wesentlichen auf Grund der Funktionalgleichung, sämtliche Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt, und erhält dann sofort das gewünschte Ergebnis mit dem Fehlergliede $O(x^{\frac{1}{3}} \log x)$.

Der entsprechende Beweisgang würde bei der Funktion Z_1 zunächst zu der Darstellung

$$Z_1(s; v; w) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s-w} \sigma_{2w}(n) \cos 2\pi vn = c^{-s-w} \sum_{1}^{c}{}' \zeta_1\left(s + w; \frac{m}{c}\right) \zeta_2\left(s - w; \frac{m'}{c}\right)$$

führen, wenn entsprechend wieder $m' \equiv am \pmod c$, $m \equiv a'm' \pmod c$ ist, m oder m' alle ganzen Zahlen von 1 bis c durchläuft und die Funktionen ζ_1, ζ_2 folgende Bedeutung haben:

$$\zeta_1(z; \alpha) = \tfrac{1}{2}\ \zeta(z; \alpha) + \tfrac{1}{2}\ \zeta(z; 1 - \alpha), \text{ falls } \alpha \text{ weder 0 noch ganzzahlig ist},$$

$$\zeta_1(z; \alpha) = \zeta(z), \text{ falls } \alpha \equiv 0 \pmod 1;\ \zeta_2(z; \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \cos 2\pi\alpha n\,.$$

Nun ist im Falle $w = 0$, da $\zeta_1\left(s + w; \frac{c}{c}\right) = \zeta(s)$ ist und

$$\sum_{m'=1}^{c}{}' \cos 2\pi \frac{m'n}{c} = 0 \text{ oder } c$$

ist, je nachdem c nicht in n aufgeht oder in n aufgeht, für $\sigma > 1$

$$Z_1(s; v; 0) = c^{-s} \sum_{m=1}^{c}{}' \left(\zeta_1\left(s; \frac{m}{c}\right) - \zeta(s)\right) \zeta_2\left(s; \frac{m'}{c}\right) + c^{-s} \sum_{m'=1}^{c}{}' \zeta(s)\ \zeta_2\left(s; \frac{m'}{c}\right)$$

$$= c^{-s} \sum_{m=1}^{c-1}{}' \left(\zeta_1\left(s; \frac{m}{c}\right) - \zeta(s)\right) \zeta_2\left(s; \frac{m'}{c}\right) + c^{1-2s}\ \zeta^2(s).$$

Da nun aber sowohl m wie m' von c verschieden sind, lassen sich, was ähnlich wie oben zu erkennen ist, die Funktionen

$$\zeta_2\left(s; \frac{m'}{c}\right) \quad \text{und} \quad c^{-s}\left(\zeta_1\left(s; \frac{m}{c}\right) - \zeta(s)\right)$$

jede durch eine für $\sigma > 0$ konvergente, für $\sigma > 1$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe darstellen. Daher ist die Funktion

$$Z_1(s; v; 0) - c^{1-2s}\ \zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \left(d(n) \cos 2\pi vn - c\, d\left(\frac{n}{c^2}\right)\right)$$

wieder durch eine für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergente Reihe darstellbar [15]). Es ist aber auf Grund

---

[14]) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, 2. Abh., Göttinger Nachr. 1915, S. 2—6.

[15]) Wie üblich, bedeutet $d(a)$ den Wert 0, wenn a keine ganze Zahl ist.

der bereits von Dirichlet selbst bewiesenen Teilerformel

$$\sum_{n=1}^{x} d\left(\frac{n}{c^2}\right) = \sum_{n=1}^{\frac{x}{c^2}} d(n) = \frac{x}{c^2}(\log x - 2\log c + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}).$$

Also folgt nach einem allgemeinen Satze sofort für jedes $\vartheta > \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{x} d(n) \cos 2\pi v n = c \sum_{n=1}^{x} d\left(\frac{n}{c^2}\right) + O(x^\vartheta) = \frac{1}{c} x \log x + \frac{1}{c} x(2\gamma - 2\log c - 1) + O(x^\vartheta).$$

Auch hier läßt sich der erwähnte „Hauptsatz" unmittelbar auf die Funktion Z_1 anwenden, und man erhält dann das Fehlerglied $O(x^{\frac{1}{3}} \log x)$. Die Fehlerglieder lassen sich, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, auf anderem Wege sicher verbessern.

Aus den von Wilton bezw. bereits von Chowla und Walfisz erhaltenen Ergebnissen folgt nun auch etwas über das analytische Verhalten der Funktionen Z im Falle $w = 0$ für gewisse irrationale Zahlen v. Da nämlich [16]), wenn in der Kettenbruchentwicklung

$$v = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \cdots$$

die Nenner a_r durch $a_r = O(r^{k+1})$ beschränkt sind, wobei k irgendeine nicht negative reelle Zahl ist, die Abschätzung gilt:

$$\sum_{n=1}^{x} d(n) e^{2\pi i n v} = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^{k+2}(x)\right),$$

so ist *sowohl die Funktion* $\mathsf{Z}_1(s; v; 0)$ *wie* $\mathsf{Z}_2(s; v; 0)$ *für solche irrationalen Werte von* v *eine reguläre Funktion von* s *in der Halbebene* $\sigma > \frac{1}{2}$. *Es hat also dann* Z_1 *an der Stelle* $s = 1$ *auch keinen Pol.*

In den Fällen $v = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{3}$, $v = \frac{1}{6}$ ist die Funktion $\mathsf{Z}_1(s; v; w)$ bis auf einen konstanten Faktor identisch mit der an anderer Stelle [17]) von mir behandelten Funktion

$$\mathsf{Z}(s; w; c) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu((n, c))\, \varphi((n, c))\, \sigma_{2w}(n)\, n^{-s-w},$$

wobei c als eine quadratfreie ganze Zahl vorausgesetzt wird, (n, c), wie üblich, den größten gemeinschaftlichen Teiler von n und c, μ und φ die Moebiussche bzw. Eulersche Funktion bedeuten. Hier haben auch die Koeffizienten, ähnlich wie bei den Funktionen Z_1 und Z_2, die Eigenschaft, daß für $c > 1$ und ganzes r

$$\sum_{n=r+1}^{c+r} \mu((n, c))\, \varphi((n, c)) = 0.$$

III. $\zeta^h(s)$.

Es sei $h \geqq 1$ und ganzzahlig, $w = w_1 + iw_2$ komplex, ebenso $z = z_1 + iz_2$, $z_1 > |w_1|$, u komplex $\neq 0$ und $|\arg u| < \frac{\pi}{2}$,

$$(4) \qquad K_h(u, w) = \frac{1}{8\pi i} \int_{z_1 - i\infty}^{z_1 + i\infty} dz\, \Gamma^h\left(\frac{z - w}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z + w}{2}\right) \Gamma^{1-h}\left(\frac{1 - z + w}{2}\right) \left(\frac{u}{2}\right)^{-z}.$$

Dann ist auf Grund der Mellinschen Umkehrungsformel und der Gleichung (3a) im Falle $h = 1$ die so definierte Funktion identisch mit der Besselschen Funktion $K_w(u)$; die

---

[16]) Wilton, l. c. Anm. [1]).

[17]) H. Kober, Eine der Riemannschen verwandte Funktionalgleichung, erscheint demnächst in der Math. Zeitschr.

Schreibweise ist geändert, da jetzt w als Variable in den Vordergrund tritt. Die Funktion $K_h(u, w)$ hat folgende einfachen Eigenschaften:

(4a) *Für* $\Re(u) > 0$ *ist* K_h *eine ganze Funktion von* w.

Man nehme zunächst $z_1 > 0$ fest an, es sei

$$|w_2| = |\Im(w)| \leqq B,\ |w_1| < z_1,\ |\arg u| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2}.$$

Nun ist bekanntlich, wenn $z' = z_0 + iz_3$ ist, für $|z_3| \geqq 1$ in jedem von zwei willkürlich, aber fest gewählten Parallelen zur imaginären Achse begrenzten Streifen gleichmäßig

$$|\Gamma(z')| = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi}{2}|z_3|}\, |z_3|^{z_0-\frac{1}{2}} (1 + O(|z_3|^{-1})),$$

in einem solchen Streifen daher für $|z_2| \geqq B + 1$ der absolute Wert des Integranden in (4) gleichmäßig (dort ist z' einmal $= \frac{1}{2}(z - w)$, dann $= \frac{1}{2}(z + w)$ bzw. $= \frac{1}{2}(1 - z + w)$ zu wählen)

$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}(h+1+1-h)}\, e^{-\frac{\pi}{4}(|z_2-w_2|+|z_2+w_2|+(1-h)|w_2-z_2|)+z_2\arg u} \cdot 2^{z_1}\, |u|^{-z_1}$$

$$\cdot \left|\frac{z_2 - w_2}{2}\right|^{\frac{z_1-w_1-1}{2}h} \left|\frac{z_2 + w_2}{2}\right|^{\frac{z_1+w_1-1}{2}} \left|\frac{w_2 - z_2}{2}\right|^{(1-h)\frac{1-z_1+w_1-1}{2}} (1 + O(|z_2|^{-1}))$$

$$= O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|z_2|+\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)|z_2|+\frac{\pi}{2}|w_2|h}\, |z_2|^A\, |u|^{-z_1}\right) = O\left(e^{-\delta|z_2|+\frac{\pi}{2}h|w_2|}\, |z_2|^A\, |u|^{-z_1}\right),$$

wenn A eine angebbare positive Zahl bedeutet. Daher ist das Integral gleichmäßig konvergent; da ferner $z_1 > |w_1|$ und so der Integrand im Endlichen regulär sowohl in z wie in w ist, ist K_h dort und somit für $|w_1| < z_1$, $|w_2| < B$ eine reguläre Funktion von w. Aus der Abschätzung des Integranden und dem Cauchyschen Integralsatz folgt nun, daß das Integral seinen Wert beibehält, wenn man den Integrationsweg parallel beliebig weit nach rechts in die Gerade $z = z_1' + iz_2$, $z_1' > z_1$ verschiebt. Die Funktion $K_h(u, w)$ ist auf Grund der vorigen Überlegung jetzt in dem größeren Gebiete $|w_1| < z'$ regulär definiert und setzt die ursprüngliche Funktion K_h analytisch fort. So folgt der Satz (4a).

(4b) *In jedem Gebiete* $|w| \leqq V$ *verschwindet* $K_h(u, w)$ *für* $|\arg u| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$, *gleichmäßig in* w, *mit wachsendem Werte von* $|u|$ *stärker als jede Potenz von* $|u|$ *mit beliebig gewähltem, negativem Exponenten.* Denn wenn $M > 0$ beliebig groß gewählt ist, darf man $z_1 > M$ festlegen und erhält auf Grund der Abschätzung des Integranden für $u \to \infty$:

$$K_h(u, w)u^M = O\left(\int_{V+1}^{\infty} e^{-\delta z_2 + \frac{1}{2}h\pi V}\, z_2^A\, |u|^{M-z_1}\, dz_2\right) + O(|u|^{M-z_1}) = o(1).$$

Die weiteren Sätze werden nicht mehr benutzt werden:

(4c) $$\frac{\partial}{\partial u}(u^{-w} K_h(u, w)) = -u^{-w} K_h(u, w+1).$$

Der Beweis ergibt sich durch Differenzieren von $u^{-w} K_h(u, w)$ und Verschiebung des Integrationsweges nach rechts um die Breite 1.

(4d) *Wenn* $\Re(w) < 0$ *ist und natürlich* $|\arg u| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$ *bleibt, gilt für* $u \to 0$:

$$u^{-w} K_h(u, w) \to 2^{-w-1}\, \Gamma^h(-w)\, \Gamma^{1-h}(\tfrac{1}{2} + w).$$

Zum Beweise multipliziere man die Gleichung (4) mit u^{-w}, der Integrationsweg wird nach links parallel in die Gerade $z = z_1' + iz_2$, $w_1 < z_1' < -w_1$, verschoben, das

Residuum im Punkte $z = -w$ ermittelt und der Grenzübergang $u \to 0$ ausgeführt. — Für die Besselsche Funktion K_w sind alle diese Sätze wohl bekannt. Man kann diese Sätze auch aus diesem Falle $h = 1$ auf dem Wege reeller Integration entwickeln, und zwar mit Hilfe der Gleichung

$$u^w K_{h+1}(u, w) = 2\pi^{-w-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{dv}{v^{w+1}} K_h\left(\frac{1}{\pi v}, w\right) \cos 2\pi uv.$$

Man setze nun in Gleichung (4) $2nu\pi^h$ statt u ein, dann folgt:

$$K_h(2nu\pi^h, w) = \frac{1}{8\pi i} \int_{z_1-i\infty}^{z_1+i\infty} dz \Gamma^h\left(\frac{z-w}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+w}{2}\right) \Gamma^{1-h}\left(\frac{1-z+w}{2}\right) \pi^{-hz} u^{-z} n^{-z}.$$

Man bilde dann — denn $d_h(n)$, die Anzahl der Zerlegungen der Zahl n in h Faktoren, ist bekanntlich $= O(n^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$ — die Funktion

$$\Phi_h(u, w) = \sum_{n=1}^\infty d(n)\, n^w K_h(2nu\pi^h, w).$$

Diese ist für $\Re(u) > 0$ auf Grund der Sätze (4 a, b) eine ganze Funktion von w; nach Satz (4 b) ist nämlich bei festgewähltem u und beliebig großem M, V

$$K_h(2nu\pi^h, w) = O(n^{-M})$$

für $n \to \infty$, gleichmäßig in w für $|w| < V$.

Für das Weitere sei jetzt $0 < \Re(w) \leqq A < z_1 - 1$. Dann ist

$$\Phi_h(u, w) = \frac{1}{8\pi i} \int_{z_1-i\infty}^{z_1+i\infty} dz\, \zeta^h(z-w) \Gamma^h\left(\frac{z-w}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+w}{2}\right) \Gamma^{1-h}\left(\frac{1-z+w}{2}\right) (\pi^h u)^{-z}$$

$$= \frac{\pi^{-h(w+\frac{1}{2})}}{8\pi i} \int_{z_1-i\infty}^{z_1+i\infty} dz \Gamma\left(\frac{z+w}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-z+w}{2}\right) \zeta^h(1+w-z) u^{-z}.$$

Die Vertauschung von Integration und Summation ist gestattet, auf Grund der beim Beweise des Satzes (4 a) gebrauchten Abschätzung und der in z_2 gleichmäßigen und der absoluten Konvergenz der $\zeta^h(z-w)$ darstellenden Reihe, da nämlich $|d_h(n)\, n^{-z+w}| \leqq d_h(n)\, n^{A-z_1}$ ist und $A - z_1 < -1$; weiterhin ist die Funktionalgleichung von $\zeta(s)$ für $s = z - w$ benutzt worden. Nun setze man die reelle Zahl z_1' irgendwo zwischen $-\Re(w)$ und $+\Re(w)$ fest und verschiebe den Integrationsweg unter Anwendung der Abschätzung aus dem Satze (4 a) und des Cauchyschen Integralsatzes parallel nach links in die Gerade $z_1' + iz_2$; hierbei wird ein einfacher Pol an der Stelle $z = 1 + w$ und ein h-facher Pol an der Stelle $z = w$ überschritten:

$$\text{(5 a)}\quad \Phi_h(u, w) = \frac{1}{4} \pi^{-h(w+\frac{1}{2})} \Big\{ \operatorname{Res}(z = w+1) + \operatorname{Res}(z = w)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{z_1'-i\infty}^{z_1'+i\infty} dz \Gamma\left(\frac{z+w}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-z+w}{2}\right) \sum_{n=1}^\infty \frac{d_h(n)}{n^{w+1}} \left(\frac{u}{n}\right)^{-z} \Big\}.$$

Hier ist nun wieder die Vertauschung der Summation mit der Integration auf Grund der bekannten Abschätzung der Gammafunktion und auf Grund der in z_2 gleichmäßigen und der absoluten Konvergenz der unendlichen Reihe gestattet; es ist nämlich

$$|\arg u| < \frac{\pi}{2}, \quad |n^{z_1'+iz_2-w-1}| \leqq n^{z_1'-\Re(w)-1} \quad \text{und} \quad z_1' - \Re(w) < 0.$$

Nun ist aber, wie man durch Anwendung der Mellinschen Umkehrungsformel auf die Gleichung

$$\Gamma\left(\frac{z+w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z+w}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+w\right) = \mathsf{B}\left(\frac{z+w}{2}, \frac{1-z+w}{2}\right)$$
$$= \int_0^1 y^{\frac{z+w-2}{2}}(1-y)^{\frac{w-z-1}{2}}\,dy = 2\int_0^\infty dt\, t^w(1+t^2)^{-\frac{1}{2}-w}\,t^{z-1}$$

(man substituierte $y = t^2(1+t^2)^{-1}$) erkennt, für $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$ und $-\Re(w) < z_1' < 1 + \Re(w)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{z_1'-i\infty}^{z_1'+i\infty} dz\,\Gamma\left(\frac{z+w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z+w}{2}\right)x^{-z} = 2\,\Gamma\left(w+\frac{1}{2}\right)x^w(1+x^2)^{-\frac{1}{2}-w}.$$

Daher wird das in Gleichung (5a) auftretende Integral gleich

$$(5b)\qquad 2\Gamma(w+\tfrac{1}{2})\,u^w \sum_{n=1}^{\infty} d_h(n)\,(n^2+u^2)^{-w-\frac{1}{2}}.$$

Ferner ist:

$$(5c)\qquad \operatorname{Res}_{(z=w+1)} = (-2)^{1-h}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+w)\,u^{-w-1}.$$

$$(5d)\quad \operatorname*{Res}_{z=w}\Gamma\left(\frac{z+w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z+w}{2}\right)\zeta^h(1+w-z)\,u^{-z}$$
$$= \operatorname*{Res}_{z=0}\Gamma\left(w+\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta^h(1-z)\,u^{-z-w} = -2u^{-w}\sum_{r_1+r_2\leq h-1} a_{h,r_1,r_2}\,\Gamma^{(r_1)}(w)\,(\log u)^{r_2},$$

wobei die Größen a_{h,r_1,r_2} feste reelle Zahlen sind und r_1 und r_2 alle ganzen Zahlen von 0 an unabhängig voneinander, aber unter der Einschränkung $r_1 + r_2 \leqq h-1$, durchlaufen. So folgt aus (5a—d):

$$(5e)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_h(n)}{(n^2+u^2)^{w+\frac{1}{2}}} = (-2)^{-h}\,u^{-2w-1}$$
$$+\frac{u^{-2w}}{\Gamma(w+\frac{1}{2})}\sum_{r_1+r_2\leq h-1} a_{h,r_1,r_2}\,\Gamma^{(r_1)}(w)\,(\log u)^{r_2} + \frac{2u^{-w}\,\pi^{h(w+\frac{1}{2})}}{\Gamma(w+\frac{1}{2})}\,\Phi_h(u,w)$$

für $\Re(w) > 0$, $\Re(u) > 0$. Die rechte Seite aber ist im Endlichen eine reguläre Funktion von w mit h-fachen Polen an den Stellen $w = 0$, $w = -1$, $w = -2, -3$ u.s. f., die von den in der Summe auftretenden nullten bis $(h-1)$-ten Ableitungen der Gammafunktion herrühren; die linke Seite der Gleichung ist gleich

$$(5f)\qquad \zeta^h(1+2w) + \sum_{n=1}^{\infty} d_h(n)\,((n^2+u^2)^{-w-\frac{1}{2}} - n^{-2w-1}).$$

Sie ist, da die Reihe hier gleichmäßig in w für $\Re(w) \geqq -1+\varepsilon$, $|w| \leqq A$, bei festgelegtem Werte von u auf Grund der Abschätzung

$$(n^2+u^2)^{-w-\frac{1}{2}} - n^{-2w-1} = -(w+\tfrac{1}{2})\int_{n^2}^{n^2+u^2} dt\,t^{-w-\frac{3}{2}} = O(n^{-2\Re(w)-3})$$

konvergiert, eine reguläre Funktion von w für $\Re(w) > -1$ mit einem h-fachen Pole an der Stelle $w = 0$, ist also so um einen Streifen von der Breite 1 nach links hin analytisch fortgesetzt.

Setzt man $1 + 2w = s$, so ist für $\Re(w) > -1$ auch $\Re(s) > -1$, und es folgt schließlich aus den Gleichungen (5e) und (5f):

Es sei u ein willkürlich gewählter Parameter, aber $\Re(u) > 0$; es sei $\Re(s) > -1$. Dann ist:

$$(5)\qquad \zeta^h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_h(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n^2+u^2)^{\frac{s}{2}}}\right) + \frac{2u^{\frac{1-s}{2}}\pi^{\frac{hs}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} d_h(n)\, n^{\frac{s-1}{2}} K_h\left(2nu\pi^h,\ \frac{s-1}{2}\right)$$

$$+ (-2)^{-h} u^{-s} + \frac{u^{1-s}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{r_1+r_2 \leqq h-1} a_{h,r_1,r_2}\, \Gamma^{(r_1)}\left(\frac{s-1}{2}\right) (\log u)^{r_2}.$$

In dem speziellen Falle $h = 1$ erhält man hieraus die auf eine Formel Watsons zurückführbare, oben erwähnte Gleichung (5′).

Man kann natürlich aus der Gleichung (5) durch Anwendung der Funktionalgleichung von $\zeta^h(s)$ eine für $\sigma < 2$ gültige Darstellung erhalten. Ferner kann man auch unschwer das Verfahren des Beweises auf eine allgemeinere Zetafunktion, z. B. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n + a|^{-s}$, übertragen.

Eingegangen 25. Oktober 1934.

Eliminanten bei Gleichungssystemen zweier Variabeln.

Von *Heinrich Kapferer* in Freiburg i. Br. [1]).

1.

Der allgemeine Resultantenbegriff bezieht sich bekanntlich auf n Formen in ebenso vielen Variabeln. Wenn insbesondere unter den n Formen eine lineare ist, etwa $L = u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n$, so wird die Resultante der n Formen $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ und L ein homogenes Polynom U in $u_1, u_2, \ldots, u_n$, die wir nach van der Waerden als *U-Resultante* der $n-1$ Formen $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ bezeichnen. Die Koeffizienten der Potenzprodukte der u_i sind selbst wieder ganzzahlige Polynome in den Koeffizienten von $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. Die wichtigste Eigenschaft der U-Resultante ist aber ihr Zerfallen in lauter lineare Faktoren, d. h. wie auch der Koeffizientenkörper K der Polynome $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ gewählt wird, es gibt stets einen Erweiterungskörper $\bar{K}$, in welchem U, falls es nicht identisch in den u verschwindet, in lauter lineare Faktoren zerfällt. Eben diesem Körper $\bar{K}$ gehören auch die gemeinsamen Nullstellen $(\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \ldots, \zeta_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, an. Die Primfaktorzerlegung von U lautet dann:

$$U(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^{r} (u_1\zeta_{i1} + u_2\zeta_{i2} + \cdots + u_n\zeta_{in})^{\mu_i}.$$

Wenn insbesondere K ein Zahlkörper ist, so ist auch für $\bar{K}$ ein gewisser Zahlkörper, also stets der Körper aller komplexen Zahlen, ausreichend. Jede dieser r verschiedenen Nullstellen hat also durch diese Zerlegung der U-Resultante eine ihr eigentümliche eindeutig bestimmte Multiplizitätszahl bekommen, die hier mit μ_i bezeichnet ist. Die Summe aller dieser r Multiplizitätszahlen ist gleich dem Produkt

$$M = m_1 m_2 \cdots m_{n-1},$$

d. h. gleich dem Produkt der Gradzahlen der $n-1$ Formen. Das ist der Inhalt des heute immer noch nach Bézout benannten Satzes, obwohl Bézout noch keinen einwandfreien Multiplizitätsbegriff gekannt hat.

Die U-Resultante, deren Existenz und Eigenschaften erst nach längeren Vorbereitungen eingesehen werden können, läßt sich vermeiden im Falle von zwei Polynomen in zwei Variabeln, bzw. zwei homogenen Polynomen in drei Variabeln. Leider ist dies in keinem Algebralehrbuch in der Art ausgeführt, daß man die Übereinstimmung der Multiplizitätszahlen mit denen in der U-Resultante einsieht. Auch wir haben nicht die Absicht, in dieser Abhandlung darauf einzugehen. Vielmehr haben wir das Ziel, durch eine methodische Neuerung die durch Netto als *Eliminanten* bezeichneten Deter-

[1]) Die vorliegende Abhandlung ist eine genauere Ausführung und Erweiterung eines Vortrags des Verfassers auf der im September 1934 stattgefundenen Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Bad Pyrmont.

minanten wieder zu Ehren zu bringen, nachdem sie durch die theoretisch weiter tragenden U-Resultanten verdrängt worden sind. In der Praxis nämlich, zum Aufsuchen der gemeinsamen Nullstellen von zwei Polynomen $f(x, y)$ und $g(x, y)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_0(y)x^{m_x} + a_1(y)x^{m_x-1} + \cdots + a_{m_x}(y)x^0 \\ &= A_0(x)y^{m_y} + A_1(x)y^{m_y-1} + \cdots + A_{m_y}(x)y^0, \\ g(x, y) &= b_0(y)x^{n_x} + b_1(y)x^{n_x-1} + \cdots + b_{n_x}(y)x^0 \\ &= B_0(x)y^{n_y} + B_1(x)y^{n_y-1} + \cdots + B_{n_y}(x)y^0, \end{aligned}$$

wird wohl niemand zu der rechnerisch umständlicheren U-Resultante greifen, sondern man wird die beiden Sylvesterschen Determinanten bilden, die man unmittelbar anschreiben kann:

$$E_{f,g}^{(x)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ b_0 & b_1 & \cdots \end{vmatrix} = P(y); \quad E_{f,g}^{(y)} = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ B_0 & B_1 & \cdots \end{vmatrix} = Q(x).$$

Man ist dann sicher, daß sämtliche Schnittpunkte $x = a$, $y = b$ der beiden Kurven $f = 0$, $g = 0$, f und g als teilerfremd vorausgesetzt, durch Zerlegen von $P(y)$ und $Q(x)$ in ihre linearen Faktoren gefunden werden können. Man wird aber bald bemerken, daß es auch Fälle gibt, in denen P oder Q oder beide noch „fremde" Faktoren besitzen, denen gar kein Schnittpunkt im gewöhnlichen Sinne entspricht, ferner, daß die Gradzahlen von $P(y)$ in y und $Q(x)$ in x häufig nicht miteinander übereinstimmen. Vor allem aber ist es unmöglich, allein auf Grund der gegebenen Polynome $P(y)$ und $Q(x)$ von Multiplizität eines Schnittpunkts zu reden. Also gerade das theoretisch Wichtigste, die Multiplizitätszahlen, auf denen der Bézoutsche Satz und alle die zahllosen davon abhängigen Sätze der algebraischen Geometrie beruhen, sind scheinbar aus den Eliminanten nicht zu erkennen. Wir fragen: *Wie verhalten sich die wohl definierten Multiplizitätszahlen der U-Resultante* (kurz die *U-Exponenten*) *zu den Multiplizitätszahlen* σ_i *und* τ_j (kurz die *E-Exponenten*), *die bei der Zerfällung der Polynome* $P(y)$ *und* $Q(x)$ *in ihre verschiedenen linearen Faktoren*

$$P(y) = \prod_i (y - \beta_i)^{\sigma_i}; \quad Q(x) = \prod_j (x - \alpha_j)^{\tau_j}$$

auftreten?

Auf diese Frage findet man in der bisherigen Literatur, wie es mir scheint, noch keine Antwort. Um das Ergebnis unserer Untersuchung kurz mitteilen zu können, führen wir eine naheliegende Definition ein. Wir bezeichnen die folgenden beiden Polynome:

$$\prod_i (x - \alpha_i)^{\varrho_i} = N_{f,g}^{(y)}, \quad \prod_i (y - \beta_i)^{\varrho_i} = N_{f,g}^{(x)}$$

als *Normaleliminanten* von f und g, wenn unter $x = \alpha_i$, $y = \beta_i$ für $i = 1, 2, \ldots r$ die r verschiedenen Schnittpunkte von $f = 0$, $g = 0$ und unter ϱ_i die zugehörigen U-Exponenten verstanden werden. Wir behaupten:

Satz 1. *Das Polynom* $N_{f,g}^{(x)}$ *ist stets ein Teiler von* $E_{f,g}^{(x)}$; *das Polynom* $N_{f,g}^{(y)}$ *ist stets ein Teiler von* $E_{f,g}^{(y)}$.

Insbesondere behaupten wir:

Satz 2. *Falls* $a_0(y)$ *und* $b_0(y)$ *teilerfremde Polynome in* y *sind, und nur dann, gilt:*

(2 a) $$c_1 N_{f,g}^{(x)} = E_{f,g}^{(x)};$$

falls $A_0(x)$ und $B_0(x)$ teilerfremde Polynome in x sind, und nur dann, gilt:

$$c_2 N_{f,g}^{(y)} = E_{f,g}^{(y)}. \tag{2 b}$$

Hierbei sind c_1 und c_2 von Null verschiedene, von x und y unabhängige Konstanten. Überdies werden wir den tieferen Grund für das Auftreten von „störenden" Faktoren in den Eliminanten aufzeigen, d. h. den Grund dafür, daß die Normaleliminanten sehr oft nur als Teiler der gewöhnlichen Eliminanten auftreten und nicht mit letzteren identisch sind, ferner den Grund für die häufige Gradverschiedenheit der beiden gewöhnlichen Eliminanten. Die eben noch als „störende" Faktoren bezeichneten Teiler von E werden dann als völlig gleichberechtigt mit den übrigen Faktoren erscheinen und jeder einzelne lineare Teiler wird seine wohlbestimmte und explizit berechenbare Multiplizität erhalten.

2.

Charakteristisch für alles Folgende ist der Gebrauch von *mehrfach* homogenen Polynomen, wie sie in noch viel allgemeinerer Form Herr van der Waerden in seinen Abhandlungen zur algebraischen Geometrie[2]) verwandt hat. Für unseren Zweck kommt man mit zweifach homogenen Polynomen aus. Jedes Polynom $f(x, y)$ in zwei Variabeln ist in eineindeutiger Weise einem zweifach homogenen Polynom $F(x_1, x_2; y_1, y_2)$ in zwei Paaren von Variabeln zugeordnet, nämlich dem folgenden:

$$F \equiv x_2^{m_x} y_2^{m_y} f\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}\right),$$

wo m_x und m_y die Gradzahlen von f in x_1 bzw. in y_1 bedeuten. F selbst ist also eine binäre Form vom Grade m_x im x_1, x_2 und gleichzeitig eine binäre Form vom Grade m_y in y_1, y_2, und die Summe $m_x + m_y$ ist die Gesamtdimension von F. Einer Nullstelle $x = \alpha$, $y = \beta$ von $f(x, y)$ entspricht die Nullstelle $x_1 = \alpha, x_2 = 1, y_1 = \beta, y_2 = 1$ von F, und umgekehrt. F hat aber noch weitere Nullstellen, die in f nicht in Erscheinung treten; denn zwei Zahlenpaare $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ und $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$ bilden schon eine Nullstelle von F, wenn $F(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2) = 0$ ist. Allgemein ist eine Nullstelle von F durch zwei simultane lineare Gleichungen

$$\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2 = 0, \qquad \beta_2 y_1 - \beta_1 y_2 = 0$$

charakterisiert. Diejenigen unter den Nullstellen von F, bei denen $\alpha_2 \neq 0$ und gleichzeitig $\beta_2 \neq 0$ sind, entsprechen den Nullstellen im gewöhnlichen Sinn $x = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, y = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ von f, dagegen denjenigen Nullstellen, bei denen $\alpha_2 = 0$ oder $\beta_2 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$ und $\beta_2 = 0$ ist, entspricht keine Nullstelle von $f(x, y)$.

Wenn nun zwei doppelt homogene und teilerfremde Polynome F und G vorliegen, so kann man zwei Eliminanten bilden, je nachdem man x_1, x_2 oder y_1, y_2 eliminiert. Zum Unterschied von den gewöhnlichen Eliminanten, die wir mit E bezeichnen, werden wir die binären Eliminanten von doppelt binären Polynomen mit $B_{F,G}^{(x_1,x_2)} = P(y_1, y_2)$ und $B_{F,G}^{(y_1,y_2)} = Q(x_1, x_2)$ bezeichnen.

---

[2]) B. L. van der Waerden, „Zur algebraischen Geometrie. I. Gradbestimmung von Schnittmannigfaltigkeiten einer beliebigen Mannigfaltigkeit mit Hyperflächen", Mathematische Annalen **108** (1933), S. 121 ff. — Die Anregung, doppelt binäre Formen zu benützen, d. h. zur funktionentheoretischen Ebene überzugehen, verdanke ich jedoch nicht der eben zitierten Abhandlung, sondern einer brieflichen Mitteilung Herrn van der Waerdens selbst, dem ich vorher den Inhalt meiner Sätze 1 und 2 mitgeteilt hatte.

Diese binären Eliminanten haben mehrere Eigenschaften, durch die sie sich in vorteilhafter Weise von den gewöhnlichen Eliminanten unterscheiden. *Sie bringen erst die erwünschte Ordnung in all die Fragen, die bei den gewöhnlichen Eliminanten unbeantwortet bleiben.*

Zunächst ist der Grad g von $B_{F,G}^{(x_1,x_2)}$ in y_1, y_2 derselbe wie der Grad von $B_{F,G}^{(y_1,y_2)}$ in x_1, x_2, und zwar ist

$$g = m_x n_y + m_y n_x.$$

Denn wenn man F und G wie folgt ordnet:

$$\begin{aligned}
F &= c_0(y_1, y_2)x_1^{m_x} + c_1(y_1, y_2)x_1^{m_x-1}x_2 + \cdots \\
F &= C_0(x_1, x_2)y_1^{m_y} + C_1(x_1, x_2)y_1^{m_y-1}y_2 + \cdots \\
G &= d_0(y_1, y_2)x_1^{n_x} + d_1(y_1, y_2)x_1^{n_x-1}x_2 + \cdots \\
G &= D_0(x_1, x_2)y_1^{n_y} + D_1(x_1, x_2)y_1^{n_y-1}y_2 + \cdots,
\end{aligned}$$

so bekommt die Determinante $B_{F,G}^{(y_1,y_2)}$ genau n_y Zeilen mit $C_i(x_1, x_2)$ als Elementen, die alle von ein und derselben Dimension m_x sind, außerdem m_y Zeilen mit $D_i(x_1, x_2)$ als Elementen, die alle von der Dimension n_x sind. Also hat das allgemeine Glied der Determinante den angegebenen Grad $g = m_x n_y + m_y n_x$. Es ist also g ein in x, y symmetrischer Ausdruck und schon deshalb bei *beiden* Eliminanten derselbe.

Die binären Eliminanten haben ferner keine störenden Faktoren, d. h. sie haben keine Linearteiler, denen überhaupt keine gemeinsame Nullstelle von F und G entspricht. Denn aus dem elementaren Satz, daß für zwei binäre Formen $A(u, v)$ und $B(u, v)$ dann und nur dann $E_{A,B}^{(u,v)} = 0$ ist, wenn die beiden binären Formen A und B einen gemeinsamen linearen Teiler in u, v haben, folgt sofort der entsprechende Satz für die $B_{F,G}$:

Satz 3. *Jeder Linearteiler* $(\beta_2 y_1 - \beta_1 y_2)$ *von* $B^{(x_1,x_2)} = P(y_1, y_2)$ *ist wenigstens einem Linearteiler* $(\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2)$ *von* $B^{(y_1,y_2)} = Q(x_1, x_2)$ *zugeordnet, und umgekehrt, so daß* $(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)$ *eine gemeinsame Nullstelle von* F *und* G *ist.*

Kennt man also die Primfaktorzerlegung von $P(y_1, y_2)$ und $Q(x_1, x_2)$, so ist man nicht nur imstande, — analog wie bei gewöhnlichen Eliminanten — *alle* gemeinsamen Nullstellen von F und G anzugeben, sondern man ist auch sicher — das ist das Neue —, daß keine Linearteiler vorhanden sind, denen keine gemeinsame Nullstelle von F und G entspricht.

Das theoretisch Interessanteste bietet aber die Gegenüberstellung der binären Eliminanten mit den U-Resultanten, nämlich die Tatsache, daß man die linearen Faktoren der $B_{F,G}$ so zu Potenzprodukten anordnen kann, daß sämtliche auftretenden Exponenten nichts anderes sind als U-Eponenten, die zu gewissen zugehörigen Polynomen der gewöhnlichen Art gehören. Das wird das Hauptergebnis der vorliegenden Abhandlung sein. Um dieses präziser formulieren und dann auch beweisen zu können, wollen wir zunächst die Nullstellen $(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)$ der doppelt binären Polynome in folgende *vier Arten von Nullstellen* einteilen:

I. Art: $(\alpha, 1; \beta, 1)$, charakterisiert durch $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0$:
II. Art: $(1, 0; \beta, 1)$, „ „ $\alpha_2 = 0, \beta_2 \neq 0$;
III. Art: $(\alpha, 1; 1, 0)$, „ „ $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 = 0$;
IV. Art: $(1, 0; 1, 0)$ „ „ $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0$.

Wenn nun zwei teilerfremde Polynome F und G vorliegen, so verteilen sich die gemeinsamen Nullstellen auf obige vier Arten, und es handelt sich jetzt darum, die Multiplizität einer jeden in einer der obigen Ankündigung entsprechenden Weise zu definieren. Wir *definieren als Multiplizität* eines Punktes

I. Art: den U-Exponenten des Punktes $x = \alpha,\ y = \beta$ in dem Polynompaar $F(x, 1; y, 1)$ und $G(x, 1; y, 1)$;

II. Art: den U-Exponenten des Punktes $x = 0,\ y = \beta$ in dem Polynompaar $F(1, x; y, 1)$ und $G(1, x; y, 1)$;

III. Art: den U-Exponenten des Punktes $x = \alpha,\ y = 0$ in dem Polynompaar $F(x, 1; 1, y)$ und $G(x, 1; 1, y)$;

IV. Art: den U-Exponenten des Punktes $x = 0,\ y = 0$ in dem Polynompaar $F(1, x; 1, y)$ und $G(1, x; 1, y)$.

Nun seien die r verschiedenen Schnittpunkte von $F = 0, G = 0$ überhaupt durch

$$\alpha_{2i} x_1 - \alpha_{1i} x_2 = 0, \quad \beta_{2i} y_1 - \beta_{1i} y_2 = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

bezeichnet. Zu jedem dieser Punkte gehört ein nach der eben gegebenen Definition wohl bestimmter U-Exponent, den wir mit μ_i bezeichnen. Dann lautet unser

Hauptsatz:

$$(4\,a) \qquad B_{F,G}^{(x_1,x_2)} = \prod_{i=1}^{r} (\beta_{2i} y_1 - \beta_{1i} y_2)^{\mu_i},$$

$$(4\,b) \qquad B_{F,G}^{(y_1,y_2)} = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_{2i} x_1 - \alpha_{1i} x_2)^{\mu_i},$$

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i = m_x n_y + m_y n_x .$$

Wir wollen an diesen Hauptsatz zunächst die *Folgerungen* anschließen, die sich daraus *für die gewöhnlichen Eliminanten* ergeben, und dann erst den Beweis des Hauptsatzes.

Aus den $B_{F(x_1,x_2;y_1,y_2),\,G(x_1,x_2;y_1,y_2)}$ gehen die $E_{F(x,1;y,1),\,G(x,1;y,1)}$ durch die Substitution

$$x_1 \to x, \quad y_1 \to 1, \quad x_2 \to 1, \quad y_2 \to 1$$

hervor. Es wird also nach dem Hauptsatz sein:

$$E_{F,G}^{(x)} = \prod_{i=1}^{r} (\beta_{2i} y - \beta_{1i})^{\mu_i},$$

$$E_{F,G}^{(y)} = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_{2i} x - \alpha_{1i} x_2)^{\mu_i},$$

so daß also formal die Gradzahlen der $B_{G,F}$ für die $E_{G,F}$ erhalten geblieben sind; *effektiv* aber, da ja die Null für die Konstanten α_{2i} und β_{2i} zulässig ist, können sich dementsprechend die Gradzahlen der E in y bzw. in x erniedrigen, und die Gradverschiedenheit der beiden E wird verständlich. Das wird noch deutlicher in der nachfolgenden tabellarischen Darstellung, welche zeigen will, wie die vier Schnittpunktarten in den verschiedenen Eliminanten zum Vorschein kommen.

	I. Art	II. Art	III. Art	IV. Art
$B_{F,G}^{(y_1,y_2)} =$	$\prod_{i=1}^{s} (x_1 - \alpha_i x_2)^{\lambda_i}$	$\prod_{k=1}^{v} x_2^{\nu_k}$	$\prod_{j=1}^{t} (x_1 - \alpha_j x_2)^{\mu_j}$	x_2^{ϱ}
$B_{F,G}^{(x_1,x_2)} =$	$\prod_{i=1}^{s} (y_1 - \beta_i x_2)^{\lambda_i}$	$\prod_{k=1}^{v} (y_1 - \beta_k y_2)^{\nu_k}$	$\prod_{j=1}^{t} y_2^{\mu_j}$	y_2^{ϱ}

Hieraus liest man ab, daß der gemeinsame Grad der beiden Normaleliminanten, ihrer Definition nach, gleich $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i$ ist; daß der Grad von $E^{(y)}_{F,G(x,1;y,1)}$ gleich $\Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_j$ ist; daß der Grad von $E^{(x)}_{F,G}$ gleich $\Sigma\lambda_i + \Sigma\nu_k$ ist. Darin liegt auch der Beweis der Sätze 1 und 2. Denn unter der Voraussetzung des Satzes (2 a) insbesondere, und nur dann, ist kein Schnittpunkt II. Art vorhanden, also $\Sigma\nu_k = 0$; unter der Voraussetzung von (2 b), und nur dann, ist kein Schnittpunkt III. Art vorhanden, also $\Sigma\mu_j = 0$. Der isolierte Punkt IV. Art tritt bei den E überhaupt nicht in Erscheinung.

Zusammenfassend kann man wohl sagen: Der Hauptsatz (4) über binäre Eliminanten bringt die U-Resultanten und die gewöhnlichen Eliminanten in eine genaue Beziehung zueinander; er bringt überdies eine prinzipiell wesentliche Ergänzung des Bézoutschen Satzes, insofern als er, ähnlich wie der letztere die konstante Zahl mn, ebenfalls eine nur von den vier Gradzahlen von F und G abhängige Konstante $g = m_x n_y + m_y n_x$ liefert, von der man a priori weiß, daß sie gleich der Summe der Multiplizitäten aller vorkommenden vier Nullstellenarten ist.

Wenn man, statt von den Polynompaaren $f(x, y, 1)$, $g(x, y, 1)$ auszugehen, von $f(1, y, z)$, $g(1, y, z)$ oder von $f(x, 1, z)$, $g(x, 1, z)$ ausgeht, und dann zu den zugehörigen doppelt binären Formen übergeht, so hat man insgesamt 6 binäre Eliminanten und die 3 zugehörigen Gradzahlen:

$$g_1 = m_x n_y + m_y n_x, \quad g_2 = m_y n_z + m_z n_y, \quad g_3 = m_z n_x + m_x n_z.$$

3.

Beim Beweis des Hauptsatzes machen wir wiederholt von zwei bekannten Eigenschaften aller Resultanten, also auch der U-Resultanten Gebrauch, und zwar handelt es sich hier wieder nur um die U-Resultanten $U_{(A,B)}$, die zu je zwei teilerfremden ternären Formen $A(x, y, z)$ und $B(x, y, z)$ gehören. Die erste Eigenschaft ist ausgedrückt in dem

Produktsatz. *Bedeuten* $A = A_1 A_2$ *und* A_1 *wie* A_2 *ternäre Formen in* x, y, z, *so ist*

$$U_{(A,B)} = U_{(A_1,B)} \cdot U_{(A_2,B)}. \tag{5}$$

Die zweite Eigenschaft ist in der Relation

$$U_{(A,B)} = U_{(A-tB,B)} \tag{6}$$

ausgedrückt, wo A und B die Gradzahlen m und n, $m \geqq n$, haben mögen, und wo t eine beliebige ternäre Form $(m - n)$-ten Grades ist.

Nach dem in der Einleitung schon über die linearen Teiler der U-Resultanten Gesagten folgen aus den Eigenschaften (5) und (6) sofort zwei entsprechende Eigenschaften der U-Exponenten. Für letztere benützen wir das Symbol (A, B) und setzen $(A, B) = \mu$ für einen Punkt, der A und B gemeinsam ist und in der U-Resultante den Exponenten μ besitzt. Insbesondere ist also

(7) $(A, B) = 0$ für jeden A und B *nicht* gemeinsamen Punkt.

Die (5) und (6) entsprechenden Eigenschaften der U-Exponenten lauten dann:

$$(A, B) = (A_1, B) + (A_2, B), \tag{8}$$

$$(A, B) = (A - tB, B). \tag{9}$$

Innerhalb *derselben* Relation sollen sich natürlich alle Symbole auf ein und denselben Punkt beziehen.

Dazu kommt noch die Eigenschaft

$$(A, B) = 1, \tag{10}$$

falls A und B insbesondere zwei teilerfremde lineare ternäre Formen sind, und das Symbol sich gerade auf die diesen gemeinsame Nullstelle bezieht. Die Zahl 1 ist hier wirklich die aus der Definition der U-Exponenten sich ergebende Zahl.

Mit den Eigenschaften (7), (8), (9) und (10) beweisen wir zunächst den

Hilfssatz 1. *Wenn* $x = \alpha z$, $y = \beta z$ *eine Nullstelle eines homogenen Polynoms* $f(x, y, z)$ *in drei Variabeln ist, so daß* $f(\alpha z, y, z)$ *durch* $(y - \beta z)^k$, *aber nicht durch* $(y - \beta z)^{k+1}$ *teilbar ist, so ist der U-Exponent dieser Nullstelle in bezug auf das Polynompaar* $x - \alpha z$, $f(x, y, z)$ *genau gleich* k.

Nach (9) ist nämlich bezüglich des angegebenen Punktes

$$(x - \alpha z, f(x, y, z)) = (x - \alpha z, f(\alpha z, y, z)),$$

und hieraus folgt, in Verbindung mit (7), (8) und (10), die Behauptung des Hilfssatzes.

Setzt man $z = 1$, so folgt der entsprechende Satz für *nicht homogene Polynome*, den wir nachher allein benötigen werden:

Hilfssatz 2. *Wenn* $x = \alpha$, $y = \beta$ *eine Nullstelle von* $g(x, y)$ *ist, so ist der zugehörige U-Exponent in bezug auf das spezielle Polynompaar* $x - \alpha$, $g(x, y)$ *gleich der Vielfachheit des Vorkommens des Faktors* $y - \beta$ *in* $g(\alpha, y)$.

Unter Bezugnahme auf diesen Hilfssatz 2 sind wir nun imstande, den Hauptsatz (4) zunächst in einem wichtigen *Spezialfall* als richtig einzusehen. Die Erledigung dieses Spezialfalls wird dann das Mittel sein, auf den sich der Beweis des allgemeinen Satzes stützt.

Wenn $A(u, v)$ eine beliebige Binärform in u, v ist, und $c_1 u - c_2 v$ eine lineare Form in u, v, so hat die gewöhnliche Eliminante bekanntlich den Wert $A(c_1, c_2)$, d. h. es ist

$$E^{(u,v)}_{c_1 u - c_2 v,\, A(u,v)} = A(c_1, c_2). \tag{11}$$

Daraus folgt für unsere binären Eliminanten der Satz:

$$B_{\alpha_1 x_1 - \alpha_1 x_2,\, g(x_1, x_2; y_1, y_2)} = g(\alpha_1, \alpha_2; y_1, y_2). \tag{12}$$

Wir wollen nun zeigen, daß in der Primfaktorzerlegung

$$g(\alpha_1, \alpha_2;\ y_1, y_2) = \prod_i (\beta_{2i} y_1 - \beta_{1i} y_2)^{\mu_i} \tag{13}$$

gerade jene U-Exponenten auftreten, die in unserer Multiplizitätsdefinition für die vier Schnittpunktarten gemeint sind. Dann werden wir den Hauptsatz (4) bewiesen haben für den Fall, daß eines der beiden Polynome F, G beliebig, das andere aber $\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2$ ist.

Der Beweis der Behauptung (13) zerfällt, entsprechend den vier Schnittpunktarten, in vier Teile.

Für die Schnittpunkte I. Art bedeutet (13) folgendes:

(13a) Der Punkt $(\alpha, 1; \beta, 1)$ hat in dem Polynompaar $F \equiv x - \alpha$, $G \equiv g(x, 1; y, 1)$ als Multiplizität die Vielfachheit des Vorkommens des Faktors $y - \beta$ in $g(a, 1; y, 1)$.

Für die Schnittpunkte II. Art bedeutet (13):

(13b) Der Punkt $(1, 0; \beta, 1)$ hat in $F \equiv x$, $G \equiv g(1, x; y, 1)$ als Multiplizität die Vielfachheit des Vorkommens des Faktors $y - \beta$ in $g(1, 0; y, 1)$.

Für die Schnittpunkte III. Art bedeutet (13):

(13c) Der Punkt $(\alpha, 1; 1, 0)$ hat in $F \equiv x - \alpha$, $G \equiv g(x, 1; 1, y)$ als Multiplizität die Vielfachheit des Vorkommens des Faktors y in $g(\alpha, 1; 1, y)$.

Für den Schnittpunkt IV. Art bedeutet (13):

(13d) Der Punkt $(1, 0; 1, 0)$ hat in $F \equiv x$, $G \equiv g(1, x; 1, y)$ als Multiplizität die Vielfachheit des Vorkommens des Faktors y in $g(1, 0; 1, y)$.

Die Behauptungen (13a), (13b), (13c), (13d) sind aber nichts anderes als Spezialfälle des bereits bewiesenen Hilfssatzes 2 und daher richtig.

Auf Grund des nun bewiesenen Spezialfalls (13) des Hauptsatzes (4) und auf Grund einer *Modifikation eines von mir schon früher*[3]) *aufgestellten Verfahrens zur expliziten Multiplizitätsbestimmung* für einen vorgegebenen Punkt, d. h. Bestimmung seines U-Exponenten, werden wir nun den Hauptsatz vollständig beweisen.

Da es im folgenden immer wieder auf die Anzahl ankommt, wie oft ein gewisser linearer Ausdruck als Faktor in einem gewissen Polynom auftritt, führen wir folgende bequeme Abkürzung ein:

Zwei Polynome $A(y_1, y_2)$ und $B(y_1, y_2)$ sind bezüglich $L \equiv \beta_2 y_1 - \beta_1 y_2$ *äquivalent*, in Zeichen

$$A \sim B \text{ bezüglich } L,$$

wenn A und B den Faktor L in ein und derselben Vielfachheit besitzen. Insbesondere ist demnach $A \sim 1$ bezüglich L, wenn $A \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ L)$, ferner $A \sim L^k$, wenn $A \equiv 0 (\mathrm{mod}\ L^k)$ aber $A \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ L^{k+1})$ ist.

Nun seien F und G zwei doppelt binäre Formen. Unter deren r verschiedenen Schnittpunkten überhaupt:

$$\alpha_{2i} x_1 - \alpha_{1i} x_2 = 0, \quad \beta_{2i} y_1 - \beta_{1i} y_2 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

seien genau s verschiedene, bei denen das Verhältnis $\beta_{1i} : \beta_{2i}$ ein und dieselbe Konstante, etwa $\beta_1 : \beta_2$ ist. Die zugehörigen U-Exponenten seien $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$. Die Punkte selbst seien mit $P_1, P_2, \ldots, P_s$ bezeichnet.

Nach dem Hauptsatz (4) müßte also sein:

$$(14) \qquad B_{F,G}^{(x, x_2)} \sim L^{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_s} \text{ bezüglich } L \equiv \beta_2 y_1 - \beta_1 y_2.$$

Der Hauptsatz (4) ist sogar direkt äquivalent der Behauptung (14), falls nur letztere allgemein bewiesen ist.

Zum Beweis von (14) wollen wir das oben schon erwähnte und a. a. O. aufgestellte Divisionsverfahren hier noch einmal kurz erklären.

Es mögen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ den Punkt $x = 0$, $y = 0$ gemeinsam haben. Es ist die Aufgabe, den zugehörigen U-Exponenten zu berechnen. Man bilde zu diesem Zweck nachstehendes Gleichungssystem:

$$(15) \qquad \begin{aligned} &f_1(x, y) \cdot g_1(0, y) : y^{(g_1)} - g_1(x, y) \cdot f_1(0, y) : y^{(g_1)} = x \cdot h_1(x, y), \\ &f_2(x, y) \cdot g_2(0, y) : y^{(g_2)} - g_2(x, y) \cdot f_2(0, y) : y^{(g_2)} = x \cdot h_2(x, y), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_t(x, y) \cdot g_t(0, y) : y^{(g_t)} - g_t(x, y) \cdot f_t(0, y) : y^{(g_t)} = x \cdot h_t(x, y). \end{aligned}$$

---

[3]) H. Kapferer, Axiomatische Begründung des Bézoutschen Satzes, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie 1927, 8. Abhdlg., S. 33—59.

Dazu ist zunächst zu erklären, was unter den Exponenten (g_i) zu verstehen ist. Wenn allgemein $p(x, y)$ ein Polynom in x, y ist, so soll (p) diejenige nicht negative ganze Zahl bedeuten, welche angibt, wie oft y in $p(0, y)$ als Faktor auftritt. Kurz: $p(0, y) \sim y^{(p)}$ bezüglich y. Falls aber $p(0, y)$ identisch verschwindet, soll (p) gleich ∞ gesetzt werden. Die Polynome f_1 und g_1 sollen identisch mit φ und ψ sein, bis eventuell auf die Reihenfolge. Diese soll so sein, daß $(f_1) \geqq (g_1)$ ist. Durch diese Festsetzung, und nur dann, wird h_1, wie ersichtlich, ganz rational. Die Polynome f_2 und g_2 sind identisch mit den Polynomen h_1 und g_1, bis eventuell auf die Reihenfolge; es soll nämlich wieder $(f_2) \geqq (g_2)$ sein. Durch diese Festsetzung, und nur dann, wird h_2 ganz rational. Allgemein soll das Polynompaar f_r, g_r identisch sein mit h_{r-1}, g_{r-1}, bis eventuell auf die Reihenfolge, die so sein muß, daß $(f_r) \geqq (g_r)$ ist.

Ich habe a. a. O. gezeigt, daß dann der gesuchte U-Exponent für den Punkt $x = 0, y = 0$ nichts anderes ist als

$$\mu = (g_1) + (g_2) + \cdots + (g_t) \tag{16}$$

und daß h_t definiert ist als das erste Polynom in der Reihe $h_1, h_2, \ldots$, welches den Punkt $x = 0, y = 0$ nicht mehr besitzt. Dagegen gilt bezüglich jedes einzelnen der übrigen Schnittpunkte von $f_1 = 0, g_1 = 0$ die Multiplizitätsgleichung

$$(f_1, g_1) = (h_t, g_t) = (f_{t+1}, g_{t+1}).$$

Das Divisionsverfahren (15), das praktisch oft sehr rasch zum Ziele führt und ausnahmslos richtig ist, ist zwar *im Ergebnis*, d. h. in der Zahl μ, *eindeutig*. Es ist aber bemerkenswert, daß *der Prozeß selbst nicht immer eindeutig* ist, indem es ja im Fall $(h_{i-1}) = (g_{i-1})$, der gegebenen Definition von f_i und g_i nach, gleichgültig ist, welches der beiden Polynome h_{i-1} und g_{i-1} als f_i und welches als g_i gewählt wird [4]).

Hat man für einen von (0, 0) verschiedenen Punkt $x = \alpha$, $y = \beta$ den U-Exponenten zu berechnen, so wird man vorher das gegebene Polynompaar so transformieren, daß jener in den Punkt (0, 0) fällt, was wegen der Invarianz der U-Exponenten gegenüber linearen, homogen umkehrbaren Transformationen erlaubt ist.

Aber wegen der nachfolgenden Modifikation des Divisionsverfahrens zur Nutzbarmachung für die vier Schnittpunktarten bei doppelt binären Formen bemerken wir noch, daß man die angegebene Transformation vermeiden kann, daß nämlich das System (15) für einen allgemeinen Punkt $x = \alpha$, $y = \beta$ so lautet — wir schreiben nur die i-te Zeile an —:

$$f_i(x, y) \cdot g_i(\alpha, y) : (y - \beta)^{(g_i)} - g_i(x, y) \cdot f_i(\alpha, y) : (y - \beta)^{(g_i)} = (x - \alpha) h_i(x, y),$$

wobei nun (g_i) sich, statt auf den Faktor y von $g(0, y)$, auf den Faktor $(y - \beta)$ von $g_i(\alpha, y)$ bezieht.

Die Richtigkeit der Formel (16) beruht allein auf den allgemeinen Multiplizitätseigenschaften (7), (8), (9), (10), und ist demnach *unabhängig von der zitierten Abhandlung*, in der das Divisionsverfahren zum erstenmal aufgestellt worden ist. Wir wollen dies hier nicht noch im einzelnen begründen, weil nachher bei der Übertragung des Verfahrens auf die vier Schnittpunktarten das Prinzip des Beweises noch einmal offenbar wird.

---

[4]) Dagegen ist die Anzahl t der Gleichungen (15) eine eindeutig bestimmte. Sie ist nämlich die kleinste natürliche Zahl derart, daß x^t durch das Primärideal $(\varphi, \psi, \mathfrak{p}^\sigma)$ teibar ist, wo $\mathfrak{p}$ das Primideal (x, y) bedeutet. — Vgl. H. Kapferer, „Notwendige und hinreichende Multiplizitätsbedingungen zum Noetherschen Fundamentalsatz", Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie 1927, 8. Abhandlung, S. 61—82.

Wollte man ganz ausführlich sein, so wäre für jede der vier Schnittpunktarten ein zu (15) analoges Divisionsverfahren anzugeben. Wir können aber je zwei Arten mit ein und demselben Gleichungssystem behandeln, können also mit zwei Systemen der Art (15) auskommen.

Die Schnittpunkte I. Art: $(\alpha, 1; \beta, 1)$ und die Schnittpunkte III. Art: $(\alpha, 1; 1, 0)$ können wir zusammenfassen. Da die t Zeilen des Systems (15) sich nur durch die Zeilenindizes unterscheiden, genügt es, nur die i-te Zeile anzuschreiben. Sie lautet hier:

$$\begin{aligned} &F_i(x_1, x_2; y_1, y_2) \cdot G_i(\alpha x_2, x_2; y_1, y_2) : (\beta_2 y_1 - \beta_1 y_2)^{(G_i)} \\ (17)\qquad &- G_i(x_1, x_2; y_1, y_2) \cdot F_i(\alpha x_2, x_2; y_1, y_2) : (\beta_2 y_1 - \beta_1 y_2)^{(G_i)} \\ &= (x_1 - \alpha x_2) H_i = (\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2) H_i(x_1, x_2; y_1, y_2), \end{aligned}$$

gültig für $i = 1, 2, \ldots, t$. Analog kann man die Schnittpunkte II. Art: $(1, 0; \beta, 1)$ und IV. Art: $(1, 0; 1, 0)$ zusammenfassen. Die i-te Zeile des zu (15) und (17) analogen Systems lautet:

$$\begin{aligned} &F_i(x_1, x_2; y_1, y_2) \cdot G_i(x_1, 0; y_1, y_2) : (\beta_2 y_1 - \beta_1 y_2)^{(G_i)} \\ (18)\qquad &- G_i(x_1, x_2; y_1, y_2) \cdot F_i(x_1, 0; y_1, y_2) : (\beta_2 y_1 - \beta_1 y_2)^{(G_i)} \\ &= - x_2 \cdot H_i(x_1, x_2; y_1, y_2) = (\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2) H_i(x_1, x_2; y_1, y_2). \end{aligned}$$

Wenn wir nun aus den Systemen (17) und (18) gewisse Eigenschaften der binären Eliminanten ablesen wollen — das ist doch das Ziel —, so muß man darauf achten, daß nur für je zwei *teilerfremde* Polynome nicht verschwindende Eliminanten entstehen. Wenn wir also von dem System (17) ausgehend das System der Eliminantengleichungen

$$(19)\qquad B_{F_i, G_i}^{(x_1, x_2)} \cdot B_{\frac{G_i(\alpha x_2, x_2; y_1, y_2)}{L^{(G_i)}}, G_i}^{(x_1, x_2)} = B_{\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2, G_i}^{(x_1, x_2)} \cdot B_{H_i, G_i}^{(x_1, x_2)}, \qquad L = \beta_2 y_1 - \beta_1 y_2,$$

gültig für $i = 1, 2, \ldots, t$, aufstellen — die hierbei benützten Sätze (5) und (6) für U-Resultanten gelten bekanntlich in entsprechender Form auch für die gewöhnlichen Eliminanten von je zwei einfach binären Formen —, so nützen diese für unseren Zweck nichts, falls darunter verschwindende Eliminanten vorkommen. Wenn wir auch von Anfang an voraussetzen, was wir selbstverständlich tun, daß die gegebenen Polynome F und G teilerfremd sind, so kann es doch sein, daß schon G nicht mehr teilerfremd zu $G(\alpha x_2, x_2; y_1, y_2) : L^{(g)}$ ist, usw. Nun ist aber der größte gemeinsame Teiler von

$$G_i(x_1, x_2; y_1, y_2) \quad \text{und} \quad G_i(\alpha x_2, x_2; y_1, y_2) : L^{(G_i)}$$

sicher nur ein Teiler von der Form $x_2^\sigma P_i(y_1, y_2)$, wo P ein homogenes Polynom in y_1, y_2 ist. Dieser Teiler ist dann von selbst auch Teiler von $H_i(x_1, x_2; y_1, y_2)$. Wir denken uns nun die i-te Zeile des Systems (17) durch $x_2^\sigma P_i(y_1, y_2)$ dividiert $(i = 1, 2, \ldots, t)$. Setzt man dann allgemein

$$G_i = x_2^\sigma P_i(y_1, y_2) \cdot g_i(x_1, x_2; y_1, y_2), \qquad H_i = x_2^\sigma P_i h_i,$$

so wird $(G_i) = (g_i)$, und aus dem System (17) wird das System

$$\begin{aligned} (17^*)\quad &F_i \cdot g_i(\alpha x_2, x_2; y_1, y_2) : L^{(g_i)} - g_i \cdot F_i(\alpha x_2, x_2; y_1, y_2) : L^{(g_i)} \\ &= (x_1 - \alpha x_2) L_i = (\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2) h_i. \end{aligned}$$

Analog behandeln wir das System (18) und erhalten

$$(18^*)\quad F_i \cdot g_i(x_1, 0; y_1, y_2) : L^{(g_i)} - g_i \cdot F_i(x_1, 0; y_1, y_2) : L^{(g_i)} = (\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2)\, h_i.$$

Das zu (17*) gehörige System von Eliminantengleichungen lautet dann, entspre-

chend (19), für $i = 1, 2, \ldots, t$:

$$B^{(x_1, x_2)}_{F_i, g_i} \cdot B^{(x_1, x_2)}_{\frac{g_i(\alpha x_2, x_2; y_1, y_2)}{L^{(g_i)}}, g_i} = B^{(x_1, x_2)}_{x_1 - \alpha x_2, g_i} \cdot B^{(x_1, x_2)}_{h_i, g_i}. \tag{20}$$

Das zu (18*) zugehörige System lautet, für $i = 1, 2, \ldots t$:

$$B_{F_i, g_i} \cdot B_{\frac{g_i(x_1, 0; y_1, y_2)}{L^{(g_i)}}, g_i} = B_{\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2, g_i} \cdot B_{h_i, g_i}. \tag{21}$$

Wenn wir nun allgemein den festen Punkt $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $y_1 = \beta_1$, $y_2 = \beta_2$ in Betracht ziehen, so hat dieser nach (20) sowohl als nach (21) in jedem Fall, d. h. für jede der vier Schnittpunktarten, die Multiplizität

$$\mu = (g_1) + (g_2) + \cdots + (g_t).$$

Nun wissen wir aber, nach dem bereits bewiesenen Spezialfall (13) des Hauptsatzes (4), daß gilt:

$$B^{(x_1, x_2)}_{\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2, g_i} \sim (\beta_2 y_1 - \beta_1 y_2)^{(g_i)} \text{ bezüglich } L \equiv \beta_2 y_1 - \beta_1 y_2.$$

Da ferner $g_i(\alpha x_2, x_2; y_1, y_2) : L^{(g_i)}$ überhaupt nicht mehr durch L teilbar ist, so wird

$$g_i(\alpha x_2, x_2; y_1, y_2) : L^{(g_i)} \sim 1.$$

Analog:

$$g_i(x_1, 0; y_1, y_2) : L^{(g_i)} \sim 1.$$

Da ferner die Polynome H_i und G_i identisch sind mit F_{i+1}, G_{i+1}, gemäß deren Definition, so gilt

$$B_{h_i, g_i} \sim B_{F_{i+1}, g_{i+1}} \text{ bezüglich } L.$$

Ferner ist

$$B_{F_1, G_1} \sim B_{F_1, g_1} \text{ bezüglich } L.$$

Wir haben also jetzt folgendes System von Äquivalenzen bezüglich L:

$$\begin{aligned} B_{F_1, g_1} &\sim L^{(g_1)} \cdot B_{F_2, g_2} \\ B_{F_2, g_2} &\sim L^{(g_2)} \cdot B_{F_3, g_3} \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ B_{F_t, g_t} &\sim L^{(g_t)} \cdot B_{F_{t+1}, g_{t+1}}. \end{aligned}$$

Also ist schließlich

$$B_{F_1, g_1} \sim L^{(g_1)+(g_2)+\cdots+(g_t)} \cdot B_{F_{t+1}, g_{t+1}},$$

und in Verbindung mit (16)

$$B_{F_1, G_1} \sim B_{F_1, g_1} \sim L^{\mu_1} \cdot B_{F_{t+1}, g_{t+1}} \text{ bezüglich } L \equiv \beta_2 y_1 - \beta_1 y_2. \tag{22}$$

Nun hat aber, nach dem im Anschluß an (16) Gesagten, das Polynompaar F_{t+1}, g_{t+1} den Schnittpunkt P_1 nicht mehr, dagegen besitzt es die Punkte $P_2, P_3, \ldots, P_s$ in unveränderter Multiplizität, d. h. in derjenigen, in der sie in F_1, g_1 vorkommen. Man denke sich daher das Polynompaar F_{t+1}, g_{t+1} in bezug auf Punkt P_2 analog behandelt, wie F_1, g_1 in bezug auf P_1 behandelt worden ist. Man erhält so nach (22)

$$B_{F_{t+1}, g_{t+1}} \sim L^{\mu_2} \cdot B_{F_{t_2+1}, g_{t_2+1}},$$

wo μ_2 der zum Punkt P_2 gehörige U-Exponent ist, usw. Schließlich folgt, zusammenfassend:

$$B_{F_1,g_1} \sim L^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s} \cdot B_{F_{t_s+1},g_{t_s+1}}, \tag{23}$$

wo nun F_{t_s+1} und g_{t_s+1} überhaupt *keinen* der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_s$ mehr besitzen. Daher ist nach Satz 3

$$B_{F_{t_s+1},g_{t_s+1}} \sim 1 \quad \text{bezüglich } L. \tag{24}$$

Aus (23) und (24) schließlich folgt

$$B_{F_1,g_1} \sim L^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s}$$
$$B_{F_1,G_1} \sim L^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s} \quad \text{bezüglich } L.$$

Diese letztere Äquivalenz ist aber nach (14) mit dem Hauptsatz (4) identisch.

Eingegangen 7. Januar 1935.

Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz
in ihrer Beziehung zu den quadratischen Cremonatransformationen und den Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von *G. Haenzel* in Karlsruhe.

Inhalt.

Einleitung: Inhalt und Methode 91
I. Die Regelscharen, Kollineationen und Involutionen der linearen Strahlenkongruenz 92
II. Die Polarentheorie der linearen Strahlenkongruenz 101
III. Differentialgeometrische Eigenschaften der mit ihren Regelscharen in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen 105
IV. Hüllflächen, deren Regelscharen in der linearen Kongruenz liegen 108
V. Clairaut's Differentialgleichung und die lineare Kongruenz 110
VI. Die Differentialgleichung erster Ordnung und die lineare Kongruenz 111

Betreibt man die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz als Geometrie auf der Fläche zweiter Ordnung, so entsprechen den Kongruenzstrahlen und den einscharig in der Kongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung die Punkte und Kegelschnitte der Fläche zweiter Ordnung. Durch Anfügen einer geeigneten stereographischen Projektion gehen die Strahlen der hyperbolischen Kongruenz in die Punkte einer Bildebene mit zwei reellen Fundamentalpunkten über, die Strahlen der elliptischen in die Punkte einer Bildebene mit zwei konjugiert imaginären Fundamentalpunkten. Hierbei zeigt sich zum ersten Male die für das Weitere grundlegende Tatsache, daß die automorphen Kollineationen der linearen Kongruenz in der Bildebene durch die quadratischen Cremonatransformationen wiedergegeben werden. Gleichzeitig tritt die Geometrie der linearen Kongruenz in mannigfache Verbindung mit der pseudoeuklidischen und der euklidischen Geometrie der Ebene. Es ergibt sich eine organische analytische Darstellung der von Herrn Jolles auf synthetischem Wege entdeckten Theorie der Involutionen auf der linearen Kongruenz und ihrer Polarentheorie. Diese Theorien zeigen weitgehende Isomorphieen mit der (euklidischen bzw. pseudoeuklidischen) Kreisgeometrie. Von hier aus führt eine Verbindung zur Gerade-Kugeltransformation.

Vor allem aber läßt sich die Theorie der in der linearen Kongruenz enthaltenen (transzendenten und algebraischen) Regelscharen in erheblichem Umfange auf die Theorie der ebenen Kurven aufbauen, wobei zahlreiche Theoreme gewonnen werden. Die Singularitäten dieser Regelscharen und ihre bisher kaum behandelten Hüllflächen lassen sich einfach ableiten. Heranziehung der Differentialgleichung erster Ordnung und der Differentialgleichung Clairaut's führt auf überaus einfachem Wege zu zahlreichen neuen Ergebnissen.

Die geometrische Abbildung ist ein erfolgreiches Verfahren, um bekannte Eigenschaften abzuleiten und neue Theoreme zu beweisen. Aber auch die beste Abbildung

eines geometrischen Objektes wird nicht alle seine Eigenschaften mit gleicher Deutlichkeit und in ihrem eigentlichen organischen Zusammenhange wiedergeben. Beim Verwenden von Abbildungen besteht deshalb neben großen Vorteilen die Gefahr, die Untersuchung des Objektes durch die Eigentümlichkeit der benutzten Abbildung in eine bestimmte Richtung abzudrängen, wichtige Dinge zu übersehen und andere nicht in ihrem ursprünglichen Zusammenhange zu erkennen.

Wenn im folgenden dennoch zur Darstellung neuer Ergebnisse von einer Abbildung weitgehender Gebrauch gemacht wird, so geschieht das, weil gerade diese Abbildung der ebenen Geometrie und der Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung eine ganz neuartige Bedeutung verleiht und die Ergebnisse selbst die Aufmerksamkeit immer wieder auf das Originalobjekt zurücklenken.

I. Die Regelscharen, Kollineationen und Involutionen der linearen Strahlenkongruenz.

1. Die Koordinaten eines gegebenen Strahles XY:

$$p_{ik} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{y}_k - \mathfrak{x}_k \mathfrak{y}_i$$

unterliegen der Plückerschen Grundgleichung:

$$p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} + p_{12}p_{34} = 0.$$

Die gegebene lineare Strahlenkongruenz C_1^1, bestimmt als Schnitt zweier linearen Strahlenkomplexe: $\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$ und $\Sigma b_{ik} p_{ik} = 0$, läßt sich besonders einfach darstellen, wenn ihre (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden l, r mit einem Gegenkantenpaare des Koordinatentetraeders zusammenfallen. Nehmen wir l als Kante $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = 0$ und r als Kante $\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{x}_4 = 0$, so ist die lineare Kongruenz als Schnitt der beiden speziellen linearen Komplexe mit den Gleichungen:

$$p_{12} = 0 \text{ und } p_{34} = 0$$

bestimmt. Die Grundgleichung lautet dann für die ∞^2 Kongruenzstrahlen:

$$p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0. \tag{1}$$

Ein gegebener, die Kongruenz nicht enthaltender linearer Strahlenkomplex schneidet die Kongruenz in einer (reellen oder imaginären) Regelschar zweiter Ordnung. Diese ist gegeben durch die Gleichung des Komplexes:

$$\Gamma_\lambda = \lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{14} + \lambda_3 p_{23} + \lambda_4 p_{42} + \lambda_5 p_{12} + \lambda_6 p_{34} = 0$$

und durch die Bedingung:

$$p_{12} = p_{34} = 0.$$

Als Gleichung der Trägerfläche der Regelschar erhält man:

$$F_\lambda^2 = \lambda_1 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_3 + \lambda_2 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_4 + \lambda_3 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 - \lambda_4 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_4 = 0. \tag{2}$$

Die Fläche F_λ^2 zerfällt in zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Ebenen, ihre in der linearen Kongruenz enthaltene Regelschar zweiter Ordnung also in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung, unter der Bedingung:

$$\lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 = 0. \tag{2a}$$

Die vier nicht identisch verschwindenden Linienkoordinaten der Kongruenzstrahlen mögen als homogene Punktkoordinaten aufgefaßt werden und zwar:

$$p_{13} = \xi_1,\ p_{14} = \xi_2,\ p_{23} = \xi_3,\ p_{42} = -\xi_4.$$

Die lineare Kongruenz C_1^1 sei hyperbolisch, ihre Leitgeraden und die Kanten des Koordinatentetraeders seien also reell. Die Bedingungsgleichung (1) stellt dann das Strahlenhyperboloid:

$$H^2 = \xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3 = 0 \tag{3}$$

dar, dessen ∞^2 Punkte die ∞^2 Kongruenzstrahlen eineindeutig abbilden. Das Koordinatentetraeder der ξ_i fällt mit dem Tangentialtetraeder $ARLA'$ von H^2 zusammen (Fig. 1). Dabei gelten folgende Bezeichnungen:

Ebene:	ARL	ALA'	ARA'	$A'RL$
	$\xi_1 = 0$	$\xi_2 = 0$	$\xi_3 = 0$	$\xi_4 = 0.$

Durch den Flächenpunkt A geht ein Leitstrahl l_s und ein Regelstrahl r_s des Strahlenhyperboloides H^2. Aus dem Projektionszentrum A wird dieses auf eine mit RL inzidente Bildebene ε stereographisch projiziert. Das von den drei Ebenen $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ des Koordinatentetraeders in die Bildebene eingeschnittene Dreieck $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gelte als Koordinatendreieck. Durch die stereographische Projektion sind die ∞^2 Kongruenzstrahlen auf die Punkte der Ebene ε abgebildet. Diese Abbildung drückt sich analytisch aus durch:

$$(4) \qquad \varrho p_{13} = x_1^2, \quad \varrho p_{14} = x_1 x_2, \quad \varrho p_{23} = x_1 x_3, \quad \varrho p_{42} = -x_2 x_3.$$

Der Kongruenzstrahl a mit den Koordinaten $p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{42} = 0 : 0 : 0 : 1$ entspricht auf dem Hyperboloide H^2 dem Projektionszentrum A und geht daher durch die Abbildung auf die Gerade LR ($x_1 = 0$) über. Andererseits sind L ($x_1 = x_2 = 0$) und R ($x_1 = x_3 = 0$) singuläre Punkte der Abbildung, was man folgendermaßen erkennt:

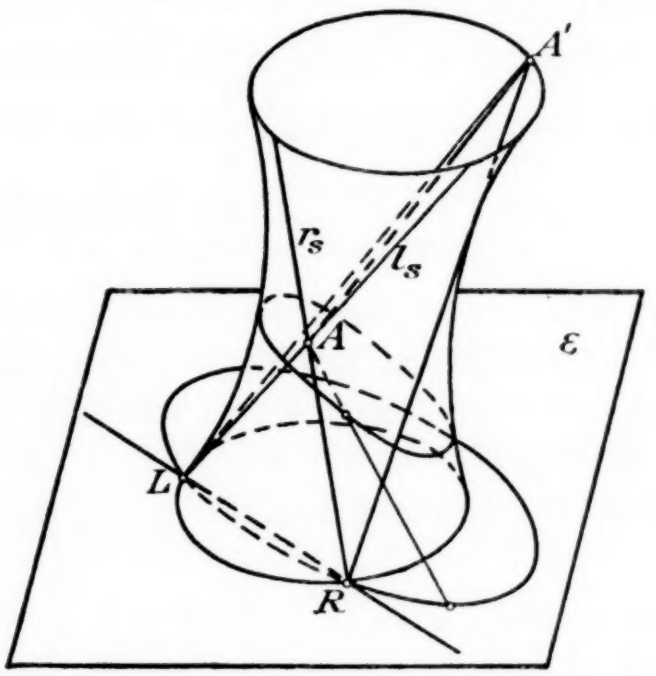

Fig. 1.

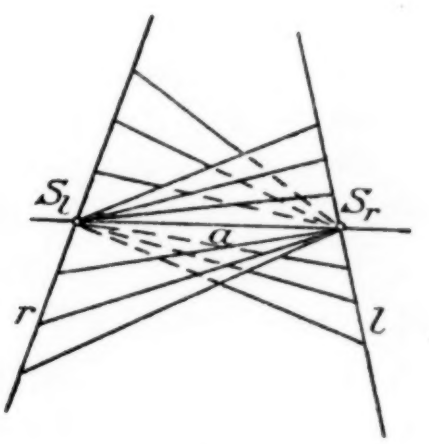

Fig. 2.

Der Kongruenzstrahl a schneidet die Leitgeraden r und l von C_1^1 bzw. in den Punkten S_l und S_r, durch ihn gehen die Ebenen $(ar) = (S_r r)$ und $(al) = (S_l l)$ (Fig. 2). Er ist der gemeinsame Strahl der beiden Kongruenzstrahlenbüschel:

$$S_l l \text{ oder: } p_{13} = p_{14} = 0 \text{ und } S_r r \text{ oder: } p_{13} = p_{23} = 0.$$

Die ∞^1 Kongruenzstrahlen des ersten Strahlenbüschels werden auf den Punkt L ($x_1 = x_2 = 0$) abgebildet, die ∞^1 Kongruenzstrahlen des zweiten auf den Punkt R ($x_1 = x_3 = 0$).

Eine nicht den Strahl a enthaltende Regelschar zweiter Ordnung der Kongruenz, dargestellt durch die Gleichung:

$$(5) \qquad \lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{14} + \lambda_3 p_{23} + \lambda_4 p_{42} = 0,$$

entspricht dem mit R und L inzidenten Kegelschnitte mit der Gleichung:

$$(6) \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 x_1 x_3 - \lambda_4 x_2 x_3 = 0.$$

Eine in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Regelschar zweiter Ordnung (Gleichung 2 a), gegeben durch die Gleichung:

$$\lambda_1^2 p_{13} + \lambda_1 \lambda_2 p_{14} + \lambda_1 \lambda_3 p_{23} - \lambda_2 \lambda_3 p_{42} = 0,$$

hat das durch

$$(\lambda_1 \mathfrak{x}_1 + \lambda_3 \mathfrak{x}_2)(\lambda_1 \mathfrak{x}_3 + \lambda_2 \mathfrak{x}_4) = 0$$

bestimmte Ebenenpaar zur Trägerfläche. Die beiden Strahlenbüschel gehen in das mit L und R inzidente, durch die Gleichung:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(\lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3) = 0$$

dargestellte Geradenpaar über.

Enthält die Regelschar zweiter Ordnung den Kongruenzstrahl a, so entspricht ihr ein Geradenpaar, dessen eine Gerade mit LR ($x_1 = 0$) zusammenfällt. Für eine solche Regelschar ist nämlich $\lambda_4 = 0$, und die Gleichung (6) ergibt:

$$x_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) = 0.$$

Jede Kurve der Ebene ε stellt umkehrbar eindeutig eine in der linearen Kongruenz C_1^1 enthaltene Regelschar und also auch deren Trägerfläche dar. Insbesondere gilt:

Eine nicht durch den Kongruenzstrahl a gehende Regelschar n-ter Ordnung der linearen Kongruenz entspricht umkehrbar eindeutig einer ebenen Kurve n-ter Ordnung. Die Kurve geht α-mal durch L, β-mal durch R, wobei $\alpha + \beta = n$ ist. Die Kurve enthält also keine weiteren Punkte der Geraden LR.

Da a ein herausgegriffener Kongruenzstrahl ist, folgt:

Die lineare Kongruenz enthält, je nachdem n gerade oder ungerade ist, die Regelscharen von $\frac{n}{2}$ *oder* $\frac{n-1}{2}$ *verschiedenen Arten von Regelflächen n-ten Grades.*

Äußerlich unterscheiden sich diese verschiedenen Arten durch die ganzzahlig möglichen Kombinationen von α und β.

Geht eine Regelschar der linearen Kongruenz $\varkappa$-mal durch den Kongruenzstrahl a, so besteht ihr Bild aus einer Kurve $(n - \varkappa)$-ter Ordnung und der $\varkappa$-fachen Geraden LR ($x_1 = 0$). Die Kurve geht α-mal durch L und β-mal durch R und schneidet $x_1 = 0$ in $\varkappa$ weiteren Punkten, die auch paarweise konjugiert imaginär sein können.

2. Die bisher behandelten Eigenschaften der Abbildung kommen in der folgenden Übersicht zum Ausdruck:

A. Die Regelschar enthält den Kongruenzstrahl a nicht. Für $\alpha = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ ist die Leitgerade l der Kongruenz bzw. ein einfacher, ein zweifacher, ein dreifacher Leitstrahl der Regelschar usf. Dieselbe Bedeutung hat die Zahl β für die Leitgerade r.

Regelschar	Bildkurve	α	β
Strahlenbüschel 1. Ordnung	Punktreihe 1. Ordnung	0	1
		1	0
Regelschar 2. Ordnung	Kurve 2. Ordnung	1	1
Regelschar 3. Ordnung	Kurve 3. Ordnung	1	2
		2	1
Regelschar 4. Ord., 1. Art	Kurve 4. Ordnung	2	2
Regelschar 4. Ord., 2. Art	Kurve 4. Ordnung	1	3
		3	1
Regelschar 5. Ord., 1. Art	Kurve 5. Ordnung	2	3
		3	2

u. s. f.

B. Die Regelschar n-ter Ordnung geht $\varkappa$-mal durch den Kongruenzstrahl a. Die Bildkurve besteht aus einer Kurve $(n - \varkappa)$-ter Ordnung und der $\varkappa$-fachen Geraden RL. Der Strahl l ist $(\alpha + \varkappa)$-facher Leitstrahl, r ist $(\beta + \varkappa)$-facher Leitstrahl der Regelschar.

Regelschar	$\varkappa$	Bildkurve ohne Gerade RL	α	β
Regelschar 2. Ordnung	1	Punktreihe 1. Ordnung	0	0
Regelschar 3. Ordnung	1	Kurve 2. Ordnung	0	1
			1	0
Regelschar 4. Ord., 1. Art	1	Kurve 3. Ordnung	1	1
Regelschar 4. Ord., 1. Art	2	Kurve 2. Ordnung	0	0
Regelschar 4. Ord., 2. Art	1	Kurve 3. Ordnung	0	2
			2	0
Regelschar 5. Ord., 1. Art	1	Kurve 4. Ordnung	1	2
			2	1

u. s. f.

Jede gegebene in der linearen Kongruenz enthaltene Regelschar n-ten Grades, für die $\alpha = \beta$ ist, läßt sich als vollständiger Schnitt der Kongruenz mit einem Strahlenkomplexe vom Grade $\frac{n}{2}$ darstellen. Für $\alpha \neq \beta$ kann die Regelfläche durch Hinzufügung von $|\alpha - \beta|$ Kongruenzstrahlenbüscheln erster Ordnung zum vollständigen Schnitt von C_1^1 mit einem Strahlenkomplexe ergänzt werden, dessen Grad die größere der Zahlen α, β ist.

Die Regelschar vierter Ordnung mit der Bedingung $\alpha = \beta = 2$ heiße Regelschar vierter Ordnung „erster Art“. Sie heiße Regelschar vierter Ordnung „zweiter Art“ für $\alpha \neq \beta$. Die Bildkurve der ersteren ist eine Kurve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in R und L. Die Gleichung der Bildkurve kann daher als Glieder niedrigster Dimension in x_1, x_2 und in x_1, x_3 nur solche von der zweiten Ordnung enthalten. Sie lautet:

$$a_1 x_1^4 + a_2 x_1^3 x_2 + a_3 x_1^3 x_3 + a_4 x_1^2 x_2^2 + a_5 x_1^2 x_2 x_3 + a_6 x_1^2 x_3^2 + a_7 x_1 x_2^2 x_3 + a_8 x_1 x_2 x_3^2 + a_9 x_2^2 x_3^2 = 0.$$

Die durch diese Bildkurve dargestellte Regelschar vierter Ordnung erster Art schneidet der durch die Gleichung:

$$a_1 p_{13}^2 + a_2 p_{13} p_{14} + a_3 p_{13} p_{23} + a_4 p_{14}^2 + a_5 p_{14} p_{23} + a_6 p_{23}^2 - a_7 p_{14} p_{42} - a_8 p_{23} p_{42} + a_9 p_{42}^2 = 0$$

dargestellte quadratische Strahlenkomplex aus der linearen Kongruenz. Nach den Abbildungsgleichungen (4) kann das Glied $a_5 x_1^2 x_2 x_3$ aber nicht nur durch $a_5 p_{14} p_{23}$, sondern ebenso auch durch $-a_5 p_{13} p_{42}$ ersetzt werden, so daß es unendlich viele quadratische Gleichungen der p_{ik} gibt, die zu jener gegebenen Bildkurve führen. Mit anderen Worten:

Durch die Regelschar vierter Ordnung erster Art einer linearen Kongruenz gehen unendlich viele quadratische Strahlenkomplexe.

3. Die Gerade RL $(x_1 = 0)$ werde die „Fundamentalgerade“ und die Punkte R, L werden die „Fundamentalpunkte“ der Abbildung genannt. Es ist leicht zu erkennen, daß sich die bisherigen (und auch die weiteren) Untersuchungen auf die elliptische lineare Kongruenz übertragen lassen unter Berücksichtigung der andersgearteten

Realitätsverhältnisse. Bei konjugiert imaginären Leitgeraden der linearen Kongruenz führt die Plückersche Grundgleichung auf die reelle strahlenlose Fläche zweiter Ordnung. Bei Verwandlung dieser Fläche in eine Kugel und bei der stereographischen Projektion von einem Kugelpunkte auf die ihm gegenüberliegende Berührungsebene wird die Fundamentalgerade in die unendlichferne Gerade und die Fundamentalpunkte werden in die unendlichfernen Kreispunkte der Ebene verlegt. Die Eigenschaften der elliptischen und der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz stimmen überein, wenn man sie in der Ebene ε das eine Mal als Theoreme der euklidischen, das andere Mal als Theoreme der pseudoeuklidischen Geometrie ableitet. In diesem Sinne erscheint die Geometrie der einscharig in der elliptischen oder hyperbolischen linearen Kongruenz enthaltenen Regelfläche zweiten Grades als euklidische oder als pseudoeuklidische Kreisgeometrie. Der Beweis jedes hierher gehörigen Theorems kann dabei ebensowohl in der euklidischen wie in der pseudoeuklidischen Ebene geführt werden.

4. Ein gegebener Punkt X der Ebene ε bestimmt umkehrbar eindeutig einen Kongruenzstrahl von C_1^1. Die homogenen Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ oder die kartesischen Koordinaten x, y des Punktes sollen daher auch als die Koordinaten des Kongruenzstrahles gelten. Eine gegebene (algebraische oder transzendente) ebene Kurve bedingt umkehrbar eindeutig eine in der Kongruenz enthaltene (algebraische oder transzendente) Regelschar. Die Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ oder $f(x, y) = 0$ der Kurve soll daher zugleich als Gleichung der Regelschar und ihrer Trägerfläche gelten.

Die ∞^1 Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung in den Ebenen $\alpha_l, \beta_l, \ldots$ der Leitgeraden l von C_1^1 entsprechen den Punktreihen erster Ordnung, deren Trägergeraden $a_l, b_l, \ldots$ durch den Punkt L $(x_1 = x_2 = 0)$ gehen, so daß eine Parameterdarstellung jenes Ebenenbüschels mit einem Parameter λ:

$$\alpha_l + \lambda \beta_l = 0 \qquad\qquad -\infty \cdots \lambda \cdots +\infty$$

eine ebensolche Darstellung dieses Strahlenbüschels nach sich zieht:

$$a_l + \lambda b_l = 0.$$

Dasselbe gilt von den ∞^1 Kongruenzstrahlenbüscheln in den Ebenen $\alpha_r, \beta_r, \ldots$ der andern Leitgeraden r:

$$\alpha_r + \varrho \beta_r = 0 \qquad\qquad -\infty \cdots \varrho \cdots +\infty$$

und ihren Bildern, den Punktreihen, deren Trägergeraden $a_r, b_r, \ldots$ mit R inzident sind:

$$a_r + \varrho b_r = 0.$$

Ein gegebener Kongruenzstrahl p ist der Schnitt einer Ebene durch l mit einer Ebene durch r. Der Strahl ist daher ebenso wie sein Bildpunkt P durch Angabe des zugehörigen Parameterpaares λ, ϱ bestimmt, so daß auch λ, ϱ als Koordinaten in der linearen Kongruenz gelten können.

5. Eine gegebene lineare Strahlenkongruenz kann auf zweierlei Arten kollinear in sich transformiert werden. Bei den Transformationen der ersten Art bleibt jede der beiden Leitgeraden r, l in Ruhe; durch die Transformationen der zweiten Art werden die beiden Leitgeraden r, l miteinander vertauscht. Durch eine Kollineation der ersten Art werden die Ebenen von r und von l mit den von ihnen getragenen Kongruenzstrahlenbüscheln je projektiv auf sich bezogen. Der Kongruenzstrahl a mit den Linienkoordinaten $0:0:0:1$ und die beiden durch ihn gehenden Kongruenzstrahlenbüschel entsprechen einem Kongruenzstrahle a' und seinen beiden mit ihm inzidenten Kongruenzstrahlenbüscheln. In der Ebene ε werden daher aus R und L zwei neue Fundamental-

punkte R', L', und die Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten L, R und den Gleichungen:

$$x_2 + \lambda x_1 = 0, \qquad x_3 + \varrho x_1 = 0 \qquad -\infty \cdots \lambda, \varrho \cdots +\infty$$

entsprechen projektiv den Strahlenbüscheln mit den Mittelpunkten L',R' und den Gleichungen:

$$x_2' + \lambda' x_1' = 0, \qquad x_3' + \varrho' x_1' = 0,$$

so daß die Beziehungen gelten:

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}, \qquad \varrho = \frac{a\varrho' + b}{c\varrho' + d}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,\ ad - bc \neq 0.$$

In der Fig. 3 entspricht dem Strahle LR ($x_1 = 0$) als Element von L die Gerade $L'M'$ ($x_2' = 0$) als Element von L', dagegen dem Strahle LM ($x_2 = 0$) als Element von L die Gerade $L'R'$ ($x_1' = 0$) als Element von L', so daß die Wertepaare:

$$\lambda = \infty,\ \lambda' = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = 0,\ \lambda' = \infty$$

der λ-Substitution genügen. Diese lautet somit:

$$\lambda\lambda' = \frac{\beta}{\gamma}.$$

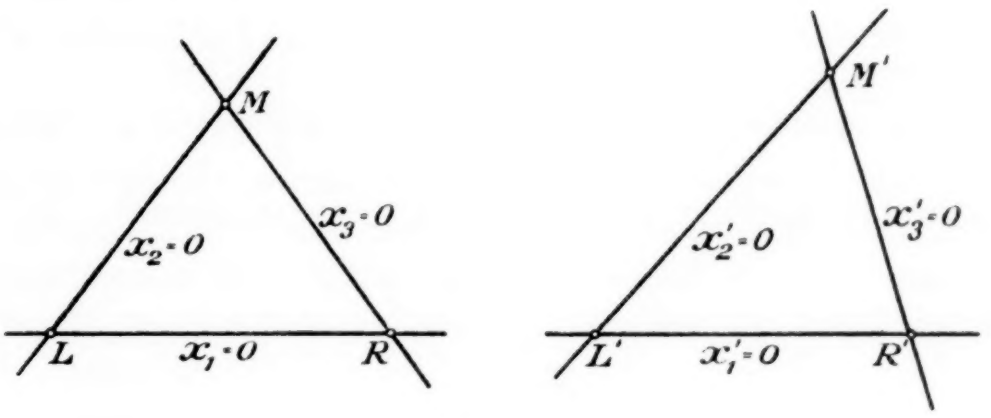

Fig. 3.

Andererseits geht RL ($x_1 = 0$) als Element von R in $R'M'$ ($x_3' = 0$) als Element von R' über und RM ($x_3 = 0$) in $R'L'$ ($x_1' = 0$). Deshalb hat die ϱ-Substitution die Form:

$$\varrho\varrho' = \frac{b}{c}.$$

Die Gleichungen der projektiven Strahlenbüschel lauten:

$$x_2 + \lambda x_1 = 0, \qquad x_2' + \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{\lambda} x_1' = 0$$

$$x_3 + \varrho x_1 = 0, \qquad x_3' + \frac{b}{c}\frac{1}{\varrho} x_1' = 0.$$

Wird $\gamma c = c_1$, $\beta c = c_2$, $b\gamma = c_3$ gesetzt, so ergeben sich nach Elimination von λ, ϱ die Substitutionen:

$$x_1 : x_2 : x_3 := \frac{c_1}{x_1'} : \frac{c_2}{x_2'} : \frac{c_3}{x_3'}$$

$$x_1 = c_1 x_2' x_3' \qquad x_2 = c_2 x_1' x_3' \qquad x_3 = c_3 x_1' x_2'$$
$$x_1' = c_1 x_2 x_3 \qquad x_2' = c_2 x_1 x_3 \qquad x_3' = c_3 x_1 x_2.$$

In Worten:

Die Kollineationen der linearen Strahlenkongruenz in sich selbst werden durch die quadratischen Cremonatransformationen der Bildkurve wiedergegeben.

In Nr. 1 wurden die Kongruenzstrahlen in die Punkte einer Fläche zweiter Ordnung abgebildet (Gleichung 3). Wird eine solche Fläche kollinear in sich transformiert, vor und nach der Kollineation aber stereographisch projiziert, so sind die beiden entstandenen Bildfelder durch eine quadratische Cremonatransformation aufeinander bezogen. Hält man vor und nach der Transformation an demselben Projektionszentrum der stereographischen Projektion fest, so fällt in Fig. 3 der singuläre Fundamentalpunkt L' auf L und R' auf R. Die Eigenschaften der quadratischen Cremonatransformationen und der Kollineationen der linearen Kongruenz in sich bedingen einander, und eine Klassifikation der ersteren zieht eine solche der letzteren nach sich. Die Kollineationen der elliptischen linearen Kongruenz in sich können insbesondere als die Kreisverwandtschaften dargestellt werden.

6. Es gibt zwei verschiedene Arten von Involutionen auf der linearen Kongruenz, da es zwei Arten von involutorischen quadratischen Cremonatransformationen gibt. Konjugierte Strahlen einer solchen Involution sind reziproke Polaren im polaren Raume einer Fläche zweiter Ordnung. Ist die Fläche zweiter Ordnung einscharig in der linearen Kongruenz C_1^1 enthalten, so heißt die Involution eine primäre. Liegt die Fläche zweiter Ordnung dagegen beidscharig involutorisch im geschart involutorischen Raume von C_1^1, so ist die Involution eine sekundäre [1]). Im folgenden gehen wir bei der Behandlung dieser Involutionen von den quadratischen involutorischen Cremonatransformationen aus.

A. Die primären Involutionen auf der linearen Kongruenz.

Die eine Art involutorischer quadratischer Cremonatransformationen in der Bildebene sind die allgemeinen Inversionen. Eine einscharig in der linearen Kongruenz enthaltene Fläche zweiter Ordnung K^2 ist nach Abschnitt 2 durch einen Kegelschnitt k^2 durch die Fundamentalpunkte L, R dargestellt (Fig. 4). Der Pol K der Geraden RL $(x_1 = 0)$

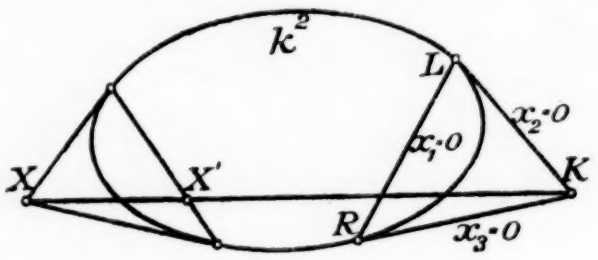

Fig. 4.

für den Kegelschnitt ist das Inversionszentrum. Ein gegebener Punkt X und der Schnittpunkt X' seiner Polaren für den Kegelschnitt mit KX sind konjugierte Punkte der Inversion und stellen zwei reziprok polare Kongruenzstrahlen in Bezug auf die einscharig in der Kongruenz enthaltene Fläche K^2 dar. Unter Benutzung des Koordinatendreiecks KRL:

$$RL\ (x_1 = 0), \qquad KL\ (x_2 = 0), \qquad KR\ (x_3 = 0)$$

sind die Fläche K^2 und der Kegelschnitt k^2 durch die Gleichung gegeben:

$$a_1 x_1^2 + 2\, a_2 x_2 x_3 = 0.$$

Setzt man:

$$RL\colon\ x_1' = 0, \qquad KL\colon x_3' = 0, \qquad KR\colon x_2' = 0, \qquad \frac{2a_2}{a_1} = c,$$

[1]) Jolles, Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz, Math. Ztschr. **27** (1928), S. 427. — Eine analytische Behandlung und Klassifikation dieser Involutionen enthält die Abhandlung: Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik **166** (1932), S. 167.

so bedingt die einscharig in der Kongruenz enthaltene Fläche K^2 die primäre Involution, dargestellt durch:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{c}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}. \tag{8}$$

Die primären Involutionen auf der elliptischen linearen Kongruenz führen, wie leicht einzusehen, auf die Transformationen durch reziproke Radien mit (reellen oder imaginären) Inversionskreisen.

Zu einem gegebenen R, L enthaltenden Kegelschnitte k^2 gibt es ein Bündel von ∞^2 selbstinversen Kegelschnitten durch R, L. Jeder von ihnen geht durch Inversion an k^2 in sich über. Es sind die zu k^2 orthogonalen Kreise in der pseudoeuklidischen oder der euklidischen Metrik mit den bzw. reellen oder konjugiert imaginären Fundamentalpunkten L, R. Jeder durch einen Punkt X gehende zu k^2 orthogonale Kegelschnitt geht auch durch den inversen Punkt X'. Aus alledem folgt:

Eine primäre Involution auf der linearen Kongruenz C_1^1 ist bedingt durch eine einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung K^2 [1]). *Konjugierte Strahlen der Involution sind reziproke Polaren für K^2, und die ∞^1 in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelstrahlen von K^2 sind die Doppelstrahlen der primären Involution. Die ∞^2 für K^2 polarinvarianten, in der Kongruenz einscharig enthaltenen Flächen zweiter Ordnung bilden einen Bündel. Die Regelscharen dieser Flächen bestehen aus reziproken Polaren für K^2. Jede dieser Flächen ist also für die primäre Involution invariant.*

B. Die sekundären Involutionen auf der linearen Kongruenz.

Neben den Inversionen gibt es eine zweite Art involutorischer, quadratischer Cremonatransformationen, bei denen das System der drei singulären Fundamentalpunkte mit dem System der drei homologen singulären Fundamentalpunkte zusammenfällt. In dem Dreieck LRK (Fig. 5):

$$LR\ (x_1 = x_1' = 0), \qquad LK\ (x_2 = x_2' = 0), \qquad KR\ (x_3 = x_3' = 0)$$

sei jeder der beiden Strahlenbüschel L und R:

$$L: x_2 + \lambda x_1 = 0, \qquad R: x_3 + \varrho x_1 = 0$$

involutorisch auf sich bezogen durch die Bedingungsgleichungen:

$$\alpha\lambda\lambda' + \beta(\lambda + \lambda') + \gamma = 0,$$
$$\alpha\varrho\varrho' + b(\varrho + \varrho') + d = 0.$$

Dann sind durch diese Beziehungen die ∞^2 Kongruenzstrahlen sekundär involutorisch gepaart. Denn einem gegebenen Punkte $X(\lambda, \varrho)$ als Schnitt von LX, RX ist ein entsprechender Punkt $X'(\lambda', \varrho')$ als Schnitt der LX, RX konjugierten Strahlen LX', RX' involutorisch zugeordnet. Die sekundäre Involution hat vier (reelle oder paarweise konjugiert imaginäre) Doppelelemente. Sie ergeben sich aus den vier Schnittpunkten der beiden Doppelstrahlen s_1, s_2 des involutorischen Strahlenbüschels L mit den beiden Doppelstrahlen s_3, s_4 des involutorischen Strahlenbüschels R. In einer linearen Strahlenkongruenz bilden daher die vier (reellen oder paarweise konjugiert imaginären) Doppelstrahlen einer sekundären Involution ein Raumvierseit, das durch die Leitgeraden der Kongruenz zu einem Tetraeder ergänzt wird [1]).

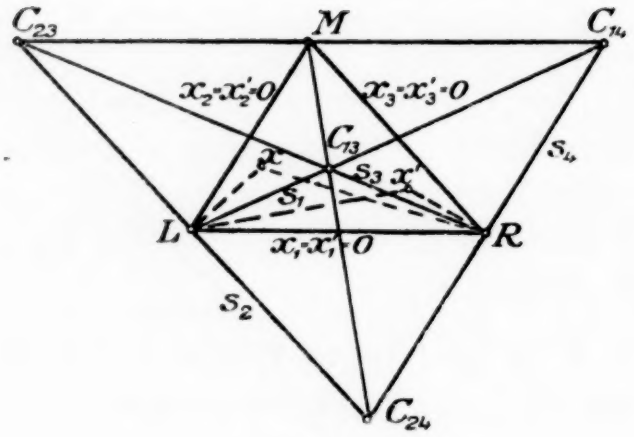

Fig. 5.

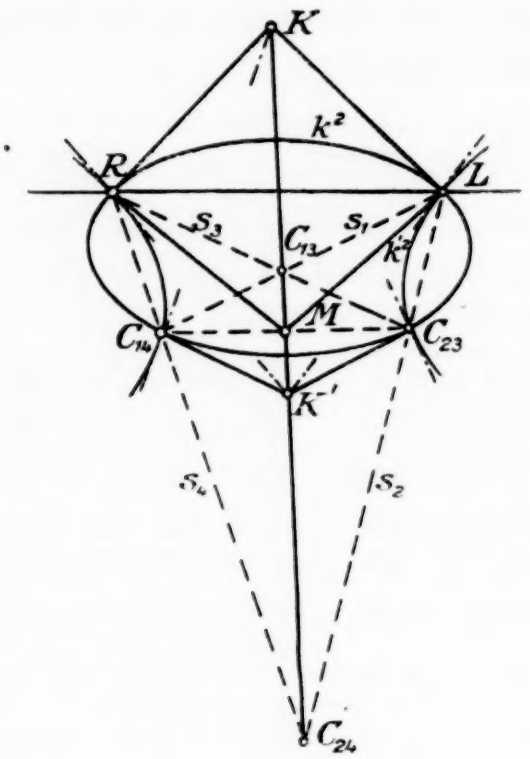

Fig. 6.

Bei der hier getroffenen Wahl des Koordinatendreiecks ist die sekundäre Involution wiedergegeben durch die involutorische Cremonatransformation:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \frac{c_1}{x_1} : \frac{c_2}{x_2} : \frac{c_3}{x_3} . \tag{9}$$

Für die Koordinaten der vier Doppelelemente ergeben sich die Verhältnisse aus:

$$\pm\sqrt{c_1} : \pm\sqrt{c_2} : \pm\sqrt{c_3}.$$

In der Fig. 5 sind s_1, s_2 die Doppelstrahlen des involutorischen Büschels L, s_3, s_4 die Doppelstrahlen des involutorischen Büschels R und ihre Schnittpunkte C_{13}, C_{14}, C_{23}, C_{24} die Doppelelemente der involutorischen Cremonatransformation. Für zwei konjugierte Elemente X, X' folgt daher:

$$(s_1, s_2, LX, LX') = (s_3, s_4, RX, RX') = -1. \tag{10}$$

An einen gegebenen Kegelschnitt k^2 durch R, L mit dem Inversionszentrum K (Fig. 6) legt man aus dem gegebenen Punkte K' die Tangenten mit den Berührungspunkten C_{14}, C_{23} und verbindet K' mit R und L.

Es geht ein einziger Kegelschnitt k'^2 durch R, L, C_{14}, C_{23}, der in R, L die Geraden $K'R$, $K'L$ berührt. Von den Kegelschnitten k^2, k'^2 mit den Inversionszentren K, K' geht jeder durch Inversion am anderen in sich über, und aus den Punkten C_{14}, C_{23} gehen die Tangenten jedes Kegelschnittes durch das Inversionszentrum des anderen. Jeder gegebene Punkt K' ist Inversionszentrum eines solchen Kegelschnittes k'^2. Die ∞^2 Kegelschnitte k'^2 erfüllen den Bündel der für k^2 inversionsfesten Kegelschnitte (A).

Das den beiden Kegelschnitten einbeschriebene vollständige Viereck:

$$LR\,C_{14}C_{23}$$

hat die drei Paare von Gegenseiten:

$$LC_{14} = s_1,\ RC_{23} = s_3; \qquad LC_{23} = s_2,\ RC_{14} = s_4; \qquad LR,\ C_{14}C_{23},$$

und daher die Nebenecken:

$$(s_1, s_3) = C_{13}, \qquad (s_2, s_4) = C_{24}, \qquad (LR, C_{14}C_{23}).$$

Die Verbindungsgerade KK' der Inversionszentren schneidet die gemeinsame Bisekante $C_{14}C_{23}$ in M. Die beiden durch k^2 und k'^2 bedingten Inversionen haben als

Resultierende die involutorische quadratische Cremonatransformation der zweiten Art mit dem Fundamentaldreieck LRM und den Deckpunkten $C_{14}, C_{23}, C_{13}, C_{24}$. In der Metrik mit den (reellen oder den konjugiert imaginären) Fundamentalpunkten L, R sind k^2 und k'^2 zwei zueinander orthogonale Kreise. Hieraus folgt für die lineare Kongruenz:

Zwei primäre Involutionen, bedingt durch zwei für einander polarinvariante, einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiter Ordnung, haben zur Resultierenden eine sekundäre Involution.

Durchläuft ein gegebener Punkt X einen Kegelschnitt $\varkappa^2$ durch R, L und durch die Fixpunkte C_{13}, C_{24}, so liegt auch der konjugierte Punkt X' der involutorischen Cremonatransformation auf $\varkappa^2$. Denn die Strahlen LX, RX beschreiben zwei projektive, zum Kegelschnitte $\varkappa^2$ perspektive Strahlenbüschel L, R. Dabei entsprechen den Geraden s_1, s_2 von L die Geraden s_3, s_4 von R. Also sind auch LX' und RX' zwei homologe Strahlen (Gleichung 10), und $\varkappa^2$ geht durch X'. Jeder Kegelschnitt durch R, L, C_{13}, C_{24} und ebenso jeder Kegelschnitt durch R, L, C_{14}, C_{23} geht durch die involutorische Cremonatransformation in sich über. Für die lineare Kongruenz gilt also:

Eine sekundäre Involution enthält [1]) *zwei Büschel einscharig involutorischer Regelscharen zweiter Ordnung der linearen Kongruenz. Die Trägerflächen des einen Büschels gehen durch die Leitgeraden und das eine Paar windschiefer (reeller oder konjugiert imaginärer) Doppelstrahlen, die Träger des anderen durch die Leitgeraden und das andere Paar Doppelstrahlen. Die Flächen beider Büschel sind wechselseitig polarinvariant.*

Wie die involutorischen (euklidischen oder pseudoeuklidischen) Kreisverwandtschaften die Involutionen auf den (elliptischen oder hyperbolischen) linearen Kongruenzen darstellen, so führt die Orthogonalitätsbedingung der Kreisgeometrie zur Polarentheorie auf der linearen Kongruenz. Ein gegebener (reeller oder imaginärer) Kreis ist der Orthogonalkreis eines Bündels von ∞^2 Kreisen seiner Ebene; jedem Kreisbüschel ist ein orthogonaler Kreisbüschel zugeordnet. Eine einscharig in der Kongruenz enthaltene Regelfläche zweiter Ordnung ist daher polarinvariant für die polaren Räume von ∞^2 solchen Flächen; diese Flächen zweiter Ordnung bilden ein Bündel. Einem Büschel einscharig in der Kongruenz enthaltener Flächen zweiter Ordnung ist ein anderer Büschel solcher Flächen so zugeordnet, daß jede Fläche des einen Büschels für die ∞^1 Flächen des anderen polarinvariant ist.

II. Die Polarentheorie der linearen Strahlenkongruenz [2]).

7. Die den Linienkoordinaten anhaftende Plückersche Grundgleichung ergibt für die Kongruenzstrahlen die Gleichung (1):

$$p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Deutet man die vier Linienkoordinaten als homogene Punktkoordinaten (Nr. 1, Gleichung 3), — betreibt man die Geometrie der linearen Kongruenz als Geometrie auf der Fläche zweiter Ordnung H^2 —, so entspricht der in der Kongruenz enthaltenen (reellen oder imaginären) Regelschar zweiter Ordnung der Kegelschnitt auf der Fläche zweiter Ordnung. Auf der (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung H^2 mit reellem polaren Raume sind einem gegebenen Kegelschnitt f^2 diejenigen ∞^2 Kegelschnitte zu-

[2]) Die Polarentheorie ist von Herrn Jolles auf synthetischem Wege entwickelt worden in der Abhandlung: St. Jolles, Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Math. Ztschr. **33** (1931), S. 733—790. Im folgenden wird auf anderem Wege eine kurze analytische Entwicklung der Polarentheorie gegeben.

geordnet, deren ∞^2 Ebenen durch den Pol der Ebene von f^2 gehen. Diese Kegelschnitte bilden auf der Fläche eine lineare Mannigfaltigkeit zweiter Stufe, einen f^2-Bündel, und es besteht zwischen den ∞^3 Kegelschnitten der Fläche und ihren ∞^3 f^2-Bündeln eine polare Korrelation. Dieselbe zieht eine polare Korrelation zwischen den ∞^3 Regelscharen zweiter Ordnung der linearen Kongruenz C_1^1 und ihren ∞^3 Regelscharbündeln nach sich, und zwar zeigt sich im folgenden leicht, daß die Trägerfläche der in der Kongruenz enthaltenen Regelschar $\mathfrak{R}^2$ für die ∞^2 Trägerflächen des zugeordneten Regelscharbündels autopolar ist.

Durch die lineare Kongruenz C_1^1 gehen die ∞^1 linearen Komplexe eines Komplexbüschels, dargestellt durch: $p_{12} + \lambda p_{34} = 0$ $(-\infty \cdots \lambda \cdots + \infty)$. Die ∞^3 linearen Komplexe, die für diesen Komplexbüschel nullinvariant sind, bilden das Γ-Gebüsch der linearen Kongruenz. Dieses ist perspektiv zum Gebüsch der ∞^3 in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung, dem $\mathfrak{R}^2$-Gebüsch der Kongruenz. Wird doch durch einen gegebenen linearen Komplex des Γ-Gebüsches die Kongruenz je in einer Regelschar zweiter Ordnung geschnitten. Demnach kann die Polarität in der linearen Strahlenkongruenz auch als Polarität in ihrem Γ-Gebüsch angesehen werden. Dabei ist einem gegebenen linearen Komplexe Γ des Γ-Gebüsches je ein Bündel von ∞^2 solchen Komplexen zugeordnet, und der lineare Komplex Γ ist für jene ∞^2 linearen Komplexe nullinvariant.

Demnach stellen sich vier polare Korrelationen in den betrachteten geometrischen Trägergebilden folgendermaßen nebeneinander:

Träger der Polarität	Die Fläche zweiter Ordnung	Die lineare Kongruenz als Träger ihres $\mathfrak{R}^2$-Gebüsches	Die lineare Kongruenz als Träger ihres Γ-Gebüsches	Die Ebene mit zwei Fundamentalpunkten
Elemente der Zuordnung	Der Kegelschnitt f^2 und die ∞^2 Kegelschnitte eines f^2-Bündels	Die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und die ∞^2 Regelscharen eines $\mathfrak{R}^2$-Bündels	Der lineare Komplex Γ und die ∞^2 Komplexe eines Γ-Bündels	Der Kreis k^2 und die ∞^2 Kreise eines k^2-Bündels
Art der Zuordnung	Zugeordete Kegelschnitte liegen in konjugierten Ebenen	Die Trägerflächen zugeordneter Regelscharen sind für einander autopolar	Zugeordnete Komplexe sind für einander nullinvariant	Zugeordnete Kreise sind für einander selbstinvers.

8. Ein gegebener linearer Komplex Γ_λ des Γ-Gebüsches der linearen Kongruenz C_1^1 hat eine Gleichung von der Form:

$$\Gamma_\lambda = \lambda_1 p_{13} + \lambda_2 p_{14} + \lambda_3 p_{23} + \lambda_4 p_{42} = 0 \tag{11}$$

je bei festen Parameterverhältnissen $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$. Er schneidet die lineare Kongruenz in einer Regelschar zweiter Ordnung. Die Trägerfläche dieser Regelschar heißt die dem linearen Komplexe Γ „adjungierte", einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung, und der lineare Komplex heißt der Fläche zweiter Ordnung adjungiert [3]). Die Gleichung dieser Fläche zweiter Ordnung ergibt sich aus der Gleichung des Komplexes Γ_λ und den allen Kongruenzstrahlen anhaftenden Bedingungen $p_{12} = p_{34} = 0$ als:

$$F_\lambda^2 = \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_1 x_4 + \lambda_3 x_2 x_3 - \lambda_4 x_2 x_4. \tag{11 a}$$

Dabei sind den speziellen linearen Komplexen des Γ-Gebüsches (11) die je in zwei Paare (reeller oder konjugiert imaginärer) Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenen Flächen zweiter Ordnung (11a) adjungiert, denn in den beiden Gleichungen (11) und (11a)

[3]) Dieser Ausdruck und mehrere weitere Fachausdrücke des Abschnittes II sind den in Anm. 2 genannten Abhandlungen entnommen. Sie sind hier durch „...." gekennzeichnet.

werden ja diese speziellen Gebilde durch die Bedingung gekennzeichnet [4]):

$$\lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 = 0.$$

9. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ und $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \bar{\lambda}_4$ zwei Quadrupel von Parametern, so hat die bilineare Beziehung:

$$\lambda_1 \bar{\lambda}_4 + \lambda_2 \bar{\lambda}_3 + \lambda_4 \bar{\lambda}_1 + \lambda_3 \bar{\lambda}_2 = 0 \tag{12}$$

einen zweifachen geometrischen Ursprung: Sie gewährleistet einerseits im F^2-Gebüsch von C_1^1 die gegenseitige Autopolarität zweier Flächen zweiter Ordnung F_λ^2, $\bar{F}_\lambda^2$ mit ihr genügenden Koeffizienten λ_i, $\bar{\lambda}_i$, und sie erweist andererseits die im Γ-Gebüsch der linearen Kongruenz diesen beiden Flächen adjungierten linearen Komplexe Γ_λ, $\bar{\Gamma}_\lambda$ als für einander nullinvariant. Je zweien einscharig in C_1^1 enthaltenen für einander autopolaren Flächen sind zwei nullinvariante lineare Komplexe des Γ-Gebüsches adjungiert. Demnach kennzeichnet die bilineare Beziehung (12) sowohl eine polare Korrelation im F^2-Gebüsch $\Pi(F)$ der linearen Kongruenz C_1^1 wie auch eine polare Korrelation im Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$, nämlich:

Für eine gegebene Fläche zweiter Ordnung P_μ^2 im F^2-Gebüsch der linearen Kongruenz C_1^1 sind die ∞^2 einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen eines F^2-Bündels $\pi(F^2)$ autopolar.

Für einen gegebenen linearen Komplex Γ im Γ-Gebüsch der linearen Kongruenz C_1^1 sind die ∞^2 linearen Komplexe eines im Γ-Gebüsch enthaltenen Γ-Bündels $\pi(\Gamma)$ nullinvariant.

Ist bei festen Parameterverhältnissen $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_4$ die Gleichung

der Fläche P^2:

$$\mu_1 x_1 x_3 + \mu_2 x_1 x_4 + \mu_3 x_2 x_3 - \mu_4 x_2 x_4 = 0,$$

des linearen Komplexes Γ_μ:

$$\mu_1 p_{13} + \mu_2 p_{14} + \mu_3 p_{23} + \mu_4 p_{42} = 0,$$

so sind P_μ^2 und Γ_μ einander adjungiert. Aus der Gleichung

der Fläche P_μ^2 | des Komplexes Γ_μ

folgt die Gleichung

ihres „Polar-F^2-Bündels“ $\pi(F^2)$ | seines „Polar-Γ-Bündels“ $\pi(\Gamma)$

vermöge der bilinearen Beziehung $\mu_1 \lambda_4 + \mu_2 \lambda_3 + \mu_3 \lambda_2 + \mu_4 \lambda_1 = 0$, und sie lautet:

$$\begin{aligned}\pi(F^2) \;&= \lambda_1(\mu_1 x_1 x_3 + \mu_4 x_2 x_4)\\ &+ \lambda_2(\mu_1 x_1 x_4 + \mu_3 x_2 x_4)\\ &+ \lambda_3(\mu_1 x_2 x_3 + \mu_2 x_2 x_4) = 0\end{aligned}$$

Wird jeder einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P_μ^2 der Bündel $\pi(F^2)$ der für sie autopolaren Flächen zweiter Ordnung von C_1^1 zugeordnet, so sind die Flächen P_μ^2 und die Bündel $\pi(F^2)$ als „Polflächen“ und „Polar-F^2-Bündel“ korrelativ aufeinander bezogen. Sie bilden so das „polare F^2-Gebüsch“ der linearen Kongruenz C_1^1.

$$\begin{aligned}\pi(\Gamma) \;&= \lambda_1(\mu_1 p_{13} - \mu_4 p_{42})\\ &+ \lambda_2(\mu_1 p_{14} - \mu_3 p_{42})\\ &+ \lambda_3(\mu_1 p_{23} - \mu_2 p_{42}) = 0\,.\end{aligned}$$

Wird jedem linearen Komplexe Γ_μ des Γ-Gebüsches von C_1^1 der Bündel $\pi(\Gamma)$ der für ihn nullinvarianten linearen Komplexe von C_1^1 zugeordnet, so sind die Komplexe Γ_μ und die Bündel $\pi(\Gamma)$ als „Polkomplexe‘ und „Polar-Γ-Bündel“ korrelativ aufeinander bezogen. Sie bilden so das „polare Γ-Gebüsch“ der linearen Kongruenz C_1^1.

[4]) Die symmetrische Determinante jeder einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung hat den Rang zwei, wenn diese Bedingung erfüllt ist.

Sind die Fläche P_μ^2 des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ und der lineare Komplex Γ des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma)$ einander adjungiert, so sind auch die ∞^2Flächen des Polar-F^2-Bündels $\pi(F^2)$ bzw. den ∞^2 linearen Komplexen des Polar-Γ-Bündels $\pi(\Gamma)$ adjungiert. Das polare F^2-Gebüsch und das polare Γ-Gebüsch der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind perspektiv.

10. Nach Nr. 8 sind die ∞^2 je in zwei Paare Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallenen Regelflächen zweiter Ordnung des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ den ∞^2 speziellen linearen Komplexen des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma)$ adjungiert. Jeder Kongruenzstrahl p ist die Doppelpunktsgerade je einer solchen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung. Die (reellen oder konjugiert imaginären) Ebenen der beiden Strahlenbüschel verbinden p mit den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden der Kongruenz. Der Strahl p ist zugleich die Leitgerade des adjungierten speziellen linearen Komplexes. Für diese speziellen Elemente gilt nun:

Im polaren F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$ besteht der Polar-F^2-Bündel $\pi(F^2)$ einer zerfallenen Fläche zweiter Ordnung P^2 aus dieser Fläche und aus allen übrigen durch die Doppelpunktsgerade p von P^2 gehenden Flächen zweiter Ordnung des F^2-Gebüsches. Im polaren F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$ heißt jede solche mit ihrem Polar-F^2-Bündel inzidente Fläche „Inzidenzfläche“ und ihr Polar-F^2-Bündel „Inzidenz-F^2-Bündel“. Da die Inzidenzflächen die einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung sind und ihre Doppelpunktsgeraden die lineare Kongruenz C_1^1 erfüllen, so heißt letztere die „Inzidenzkongruenz“ des polaren F^2-Gebüsches.

11. Zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung P_μ^2, P_ν^2 des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ werden durch einen Büschel solcher Flächen verbunden. Aus ihren Gleichungen folgt die Darstellung des sie verbindenden F^2-Büschels mittels eines Parameterquotienten $\varkappa_1 : \varkappa_2$:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^2 &= (\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\nu_1)x_1x_3 \\ &+ (\varkappa_1\mu_2 + \varkappa_2\nu_2)x_1x_4 \\ &+ (\varkappa_1\mu_3 + \varkappa_2\nu_3)x_2x_3 \\ &- (\varkappa_1\mu_4 + \varkappa_2\nu_4)x_2x_4 = 0. \end{aligned}$$

Die den Flächen P_μ^2, P_ν^2 zugeordneten Polar-F^2-Bündel $\pi_\mu(F^2)$ $\pi_\nu(F^2)$ schneiden einander in einem F^2-Büschel $\pi_{\mu\nu}^2$, und von den beiden Büscheln $F_{\mu\nu}^2$, $\pi_{\mu\nu}^2$ ist jede Fläche des einen Büschels für alle Flächen des

Im polaren Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$ besteht der Polar-Γ-Bündel $\pi(\Gamma)$ eines speziellen linearen Komplexes Γ aus diesem Komplexe und aus allen übrigen durch die Leitgerade p von Γ gehenden linearen Komplexen des Γ-Gebüsches. Im polaren Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$ heißt jeder solcher mit seinem Polar-Γ-Bündel inzidente lineare Komplex „Inzidenzkomplex“ und sein Polar-Bündel „Inzidenz-Γ-Bündel“. Da die Inzidenzkomplexe die speziellen linearen Komplexe von $\Pi(\Gamma)$ sind und ihre Leitgeraden die lineare Kongruenz C_1^1 erfüllen, so heißt letztere die „Inzidenzkongruenz“ des polaren Γ-Gebüsches.

Zwei gegebene lineare Komplexe Γ_μ, Γ_ν des polaren Γ-Gebüsches $\Pi(\Gamma)$ werden durch einen Büschel solcher Komplexe verbunden. Aus ihren Gleichungen folgt die Darstellung des sie verbindenden Γ-Büschels mittels eines Parameterquotienten $\varkappa_1 : \varkappa_2$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu} &= (\varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\nu_1)p_{13} \\ &+ (\varkappa_1\mu_2 + \varkappa_2\nu_2)p_{14} \\ &+ (\varkappa_1\mu_3 + \varkappa_2\nu_3)p_{23} \\ &+ (\varkappa_1\mu_4 + \varkappa_2\nu_4)p_{42} = 0. \end{aligned}$$

Die den Komplexen Γ_μ, Γ_ν zugeordneten Polar-Γ-Bündel $\pi_\mu(\Gamma)$, $\pi_\nu(\Gamma)$ schneiden einander in einem Γ-Büschel $\pi_{\mu\nu}$, und von den beiden Büscheln $\Gamma_{\mu\nu}$, $\pi_{\mu\nu}$ ist jeder Komplex des einen Büschels für alle Komplexe des

anderen autopolar. $F^2_{\mu\nu}, \pi^2_{\mu\nu}$ sind zwei „reziprok polare F^2-Büschel" im polaren F^2-Gebüsch $\Pi(F^2)$.

anderen nullinvariant. $\Gamma_{\mu\nu}$, $\pi_{\mu\nu}$ sind zwei „reziprok polare Γ-Büschel" im polaren Γ-Gebüsch $\Pi(\Gamma)$.

Aus der Gleichung eines Büschels $F^2_{\mu\nu}$ bzw. $\Gamma_{\mu\nu}$ geht die Gleichung des zu ihm polaren Büschels vermöge der beiden bilinearen Beziehungen:

$$\mu_1\lambda_4 + \mu_2\lambda_3 + \mu_4\lambda_1 + \mu_3\lambda_2 = 0, \qquad \nu_1\lambda_4 + \nu_2\lambda_3 + \nu_4\lambda_1 + \nu_3\lambda_2 = 0$$

hervor und lautet:

$$\begin{vmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ \nu_1 & \nu_2\end{vmatrix}\cdot\left[\begin{vmatrix}\mu_1 & -\mu_4\\ x_2x_4 & x_1x_3\end{vmatrix}\lambda_1 + \begin{vmatrix}\mu_1 & -\mu_3\\ x_2x_4 & x_1x_4\end{vmatrix}\lambda_2\right]$$
$$+\begin{vmatrix}\mu_1 & -\mu_2\\ x_2x_4 & x_2x_3\end{vmatrix}\cdot\left[\begin{vmatrix}\nu_1 & \nu_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}\lambda_1 + \begin{vmatrix}\nu_1 & \nu_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}\lambda_2\right] = 0,$$
$$\begin{vmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ \nu_1 & \nu_2\end{vmatrix}\cdot\left[\begin{vmatrix}\mu_1 & \mu_4\\ p_{42} & p_{13}\end{vmatrix}\lambda_1 + \begin{vmatrix}\mu_1 & \mu_3\\ p_{42} & p_{14}\end{vmatrix}\lambda_2\right]$$
$$+\begin{vmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ p_{42} & p_{23}\end{vmatrix}\cdot\left[\begin{vmatrix}\nu_1 & \nu_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}\lambda_1 + \begin{vmatrix}\nu_1 & \nu_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}\lambda_2\right] = 0.$$

III. Differentialgeometrische Eigenschaften der mit ihren Regelscharen in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen.

12. Der Hauptstrahl c_d der linearen Kongruenz trägt den kürzesten Abstand ihrer (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden l, r. Er schneidet die Leitgerade l in C_l und die Leitgerade r in C_r (Fig. 7). Die Fluchtebene μ hälftet den kürzesten Abstand $C_l C_r$ und steht auf c_d senkrecht. Sie enthält den c_d rechtwinklig kreuzenden unendlich-

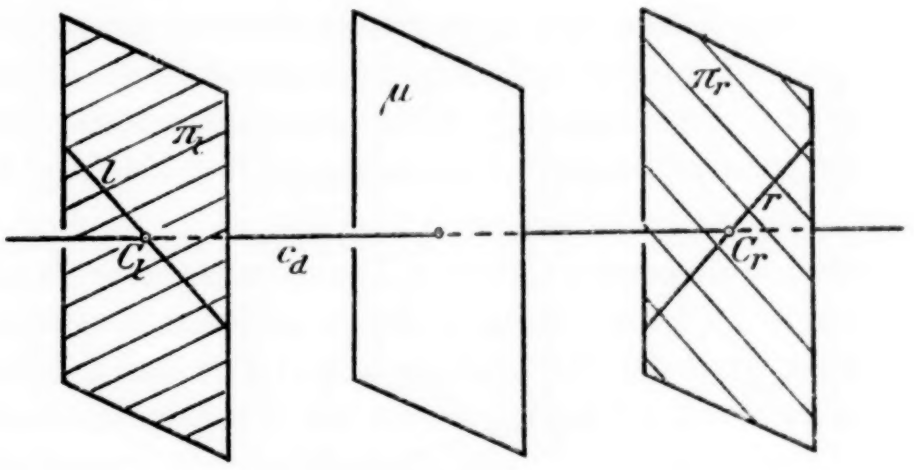

Fig. 7.

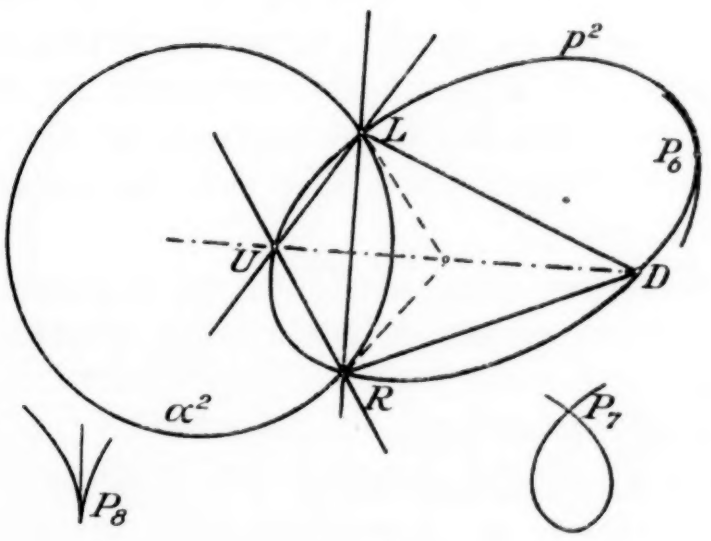

Fig. 8.

fernen Kongruenzstrahl c_r. Die Ebene π_l durch l parallel zu μ trägt den einen Büschel paralleler Kongruenzstrahlen, nämlich den Büschel der zu r parallelen Strahlen. In der Ebene π_ϱ durch r parallel zu μ liegt der zweite Büschel paralleler Kongruenzstrahlen, der Büschel der zu l parallelen Strahlen. Beide Strahlenbüschel haben den unendlichfernen Kongruenzstrahl gemein.

In der Bildebene ε (Abschn. I) sei U das Bild des unendlichfernen Kongruenzstrahls, D das Bild des Hauptstrahles. Durch U, R und L gehen ∞^2 Kegelschnitte. Sie sind die Bilder der ∞^2 einscharig in der Kongruenz enthaltenen Paraboloide. Ein Büschel dieser Kegelschnitte geht durch den Punkt D. Unter den Paraboloiden befinden sich nämlich ∞^1 gleichseitige Paraboloide. Sie bilden einen Büschel. Seine Basiskurve besteht aus den Leitgeraden der Kongruenz, dem Hauptstrahle und dem zum Hauptstrahle rechtwinkligen unendlichfernen Kongruenzstrahle. Die Geraden UL, UR der Ebene ε stellen bzw. die beiden in der Kongruenz enthaltenen Parallelstrahlenbüschel dar. Sie sind in der hyperbolischen Kongruenz reell, in der elliptischen konjugiert imaginär.

13. Eine gegebene mit ihrer Regelschar in der Kongruenz enthaltene Regelfläche habe in der Bildebene die Gleichung $f(x, y) = 0$ oder $\bar{f}(x_1, x_2, x_3) = 0$. Zwei benachbarte Regelstrahlen der Fläche bestimmen einen Elementarstreifen, bedingt durch das Bogenelement ds der ebenen Kurve mit der Gleichung $f(x, y) = 0$. Drei benachbarte Regelstrahlen bestimmen die an dieser Stelle oskulierende Regelfläche zweiter Ordnung. Sie ist einscharig in der Kongruenz enthalten und heißt das oskulierende Hyperboloid. In der Ebene ε erhalten wir als Bild den an dieser Stelle oskulierenden Kegelschnitt durch L, R. Er ist der Krümmungskreis der Kurve $f(x, y) = 0$ in der pseudoeuklidischen oder der euklidischen Metrik der Ebene ε, je nachdem es sich um die hyperbolische oder die elliptische lineare Kongruenz handelt (3). Diese Zusammenhänge ermöglichen eine neuartige, sehr anschauliche Untersuchung differentialgeometrischer Eigenschaften der mit ihren Regelscharen in der Kongruenz enthaltenen Regelflächen, insbesondere ihrer Singularitäten.

14. Die übliche Betrachtung des einzelnen Regelstrahls einer Regelfläche und seiner Umgebung steht in engem Zusammenhange mit den natürlichen Gleichungen der Regelfläche. Ein Regelstrahl geht in den Nachbarregelstrahl über durch infinitesimale Schraubung von der Translationsgeschwindigkeit t_r und der Winkelgeschwindigkeit ω_r um die Zentraltangente als Momentanachse. Die Zentraltangente verschiebt sich ihrerseits längs des Regelstrahles mit der Translationsgeschwindigkeit t_z und dreht sich um sie mit der Winkelgeschwindigkeit ω_z. Die Beschreibung der Fläche hängt allein von den Verhältnissen der vier Größen t_r, t_z, ω_r, ω_z ab. Diese vier Größen als Funktionen ein und desselben Parameters heißen die natürlichen Gleichungen der Fläche. Die Nullstellen der natürlichen Gleichungen und die Kombinationen solcher Nullstellen führen auf singuläre Regelstrahlen der Fläche, wobei aber u. a. die mehrfachen Erzeugenden in diesem Sinne nicht erfaßt werden.

15. Für die in einer linearen Kongruenz mit ihren Regelscharen enthaltenen Regelflächen ergeben sich die durch projektive Betrachtung erfaßbaren Singularitäten hier auf ganz anderem Wege:

a) Die Torsalstrahlen (Fig. 9, Punkt P_1).

Ein Bogenelement ds der Gleichung $f(x, y) = 0$ sende seine Tangente t durch einen der beiden Fundamentalpunkte L, R. Der Berührungspunkt P_1 der Tangente repräsentiert einen Regelstrahl, der den Nachbarstrahl schneidet, d. h. einen Torsalstrahl der

Fläche. Der Torsalpunkt (Schnittpunkt) liegt auf den Leitgeraden r oder l, je nachdem t mit R oder L inzident ist. An dieser Stelle der Regelfläche ist $t_r = 0$. Gründet man in der Ebene eine pseudoeuklidische oder euklidische Metrik auf die Fundamentalpunkte L, R, je nachdem eine hyperbolische oder elliptische Kongruenz in Rede steht, so gilt:

Die Torsalstrahlen einer Regelfläche mit der Gleichung $f(x, y) = 0$ entsprechen den Stellen der Bildebene, in denen die Tangenten der Kurve $f(x, y) = 0$ Minimalgeraden sind.

b) Mehrfache Torsalstrahlen.

Berührt das Bogenelement ds die Minimalgerade n-fach, so liegt ein Torsalstrahl $(n-1)$-ter Ordnung vor. Entweder müssen bei einem mehrfachen Torsalstrahl die n benachbarten Regelstrahlen einander in demselben Punkte treffen — Torsalstrahlen höherer Ordnung erster Art —, oder jeder Regelstrahl schneidet nur den folgenden — Torsalstrahlen höherer Ordnung zweiter Art. Die in der linearen Kongruenz enthaltenen Regelflächen besitzen nur Torsalstrahlen höherer Ordnung erster Art. Eine gewisse Ausnahme enthält der Fall c).

c) Der Knick (Fig. 9, Punkt P_2).

Hat die Kurve mit der Gleichung $f(x,y) = 0$ einen Knick, dessen eine Tangente durch den Fundamentalpunkt L, dessen andere Tangente durch den Fundamentalpunkt R geht, so besitzt die Regelfläche an der entsprechenden Stelle einen doppelten Torsalstrahl mit je einem Torsalpunkte auf jeder der Leitgeraden l, r.

d) Die zylindrische Erzeugende (Fig. 9, Punkt P_3).

Berührt das betrachtete Bogenelement ds die Gerade UL oder die Gerade UR, so sind an der entsprechenden Stelle zwei benachbarte Regelstrahlen der Fläche parallel (Nr. 12). Es liegt ein zylindrischer Regelstrahl vor, und es ist $\omega_r = 0$. Der unendlichferne Torsalpunkt liegt auf der Leitgeraden l oder r, je nachdem die Tangente von ds mit der Geraden UL oder UR zusammenfällt.

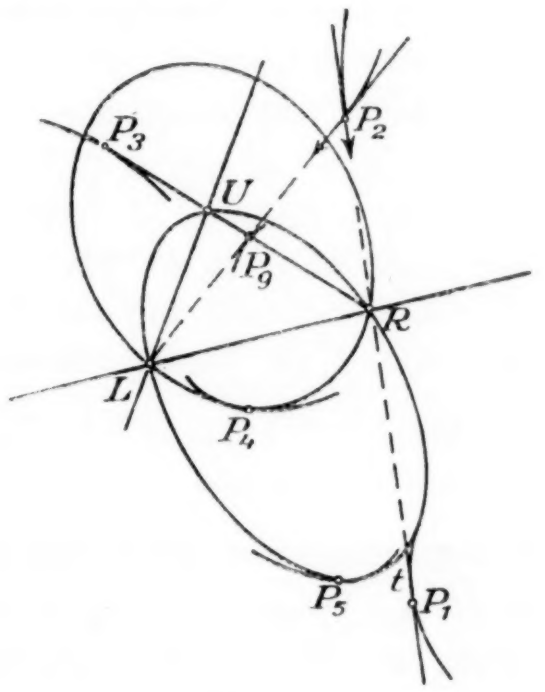

Fig. 9.

e) Der Scheitelregelstrahl (Fig. 9, Punkt P_4).

Das oskulierende Hyperboloid ist bestimmt durch den das Bogenelement oskulierenden, R, L enthaltenden Kegelschnitt. Bei Hyperoskulation heißt der entsprechende Regelstrahl ein Scheitelregelstrahl. Er liegt mit mindestens drei benachbarten Regelstrahlen in einer Regelschar zweiter Ordnung.

f) Der Wenderegelstrahl (Fig. 9, Punkt P_5).

Geht der oskulierende Kegelschnitt durch den Punkt U, so ist die oskulierende Regelfläche ein *Strahlenparaboloid* (12). In diesem Falle liegt ein Wenderegelstrahl vor, und es ist $\omega_z = 0$.

g) Der orthoide Wenderegelstrahl (Fig. 8, Punkt P_6).

Der oskulierende Kegelschnitt durch R, L, U enthält den Punkt D. Die oskulierende Regelfläche geht durch den Hauptstrahl der Kongruenz, ist also ein *gleichseitiges* Strahlenparaboloid. Der zugehörige Regelstrahl ist ein orthoider Wenderegelstrahl. Er wird von der Striktionslinie der Regelfläche senkrecht geschnitten, es ist $t_z = 0$ und $\omega_z = 0$.

h) Mehrfacher Regelstrahl, Rückkehrregelstrahl, isolierter Regelstrahl (Fig. 8, Punkte P_7, P_8).

Eine Punktsingularität der ebenen Kurve $f(x, y) = 0$ liegt dort vor, wo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ist. Es handelt sich um einen Doppelpunkt, eine Spitze oder einen isolierten Punkt, je nachdem die Involution zweier Parameter λ, λ':

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\lambda\lambda' + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(\lambda + \lambda') + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

eine hyperbolische, parabolische oder elliptische ist. Dabei sind die drei zweiten partiellen Ableitungen an der betreffenden Stelle von $f(x, y) = 0$ zu nehmen. Setzt man voraus, daß die Singularität nicht auf der Geraden LR liegt, so ist auf der linearen Kongruenz durch den ersten Fall (Doppelpunkt) ein Doppelregelstrahl gekennzeichnet. In ihm schneiden einander zwei verschiedene Schalen der Fläche, und für beide sind t_r, ω_r, t_z, ω_z von Null verschieden, falls sich an dieser Stelle nicht noch andere Singularitäten überlagern.

Durch den zweiten Fall (Spitze) wird der Rückkehrregelstrahl repräsentiert. Längs dieses Strahles berührt die Regelfläche sich selbst, und es ist $t_r = 0$, $\omega_r = 0$.

Im dritten Falle liegt ein isolierter Regelstrahl vor.

Durch einen Punkt auf der Geraden UR (Fig. 9, Punkt P_9) gehe ein Bogenelement ds, dessen Tangente mit dem Punkte L inzident ist. Der zugehörige Kongruenzstrahl liegt im Büschel paralleler Kongruenzstrahlen in der Ebene π_r (12). Zugleich ist er ein Torsalstrahl (15 a), weil der Nachbarregelstrahl ihn auf der Leitgeraden l schneidet. Gewöhnlich wird ein solcher Regelstrahl als Wendetorsalstrahl bezeichnet.

Weitere Singularitäten lassen sich aus den hier angeführten durch Überlagerung ableiten.

IV. Hüllflächen, deren Regelscharen in der linearen Kongruenz liegen.

16. Regelflächen, die eine stetige Folge einscharig in der linearen Kongruenz enthaltener Flächen zweiter Ordnung umhüllen, heißen „in der linearen Kongruenz enthaltene Hüllflächen". Im folgenden werden mehrere wichtige Arten solcher Hüllflächen behandelt.

Die für eine einscharig in der linearen Kongruenz enthaltene Fläche zweiter Ordnung polarinvarianten Hüllflächen.

Vorgelegt sei die elliptische lineare Kongruenz. Die hyperbolische denken wir uns durch imaginäre Kollineation in die elliptische Kongruenz verwandelt. Durch Deutung der Plückerschen Grundgleichung als Kugel und durch stereographische Projektion

dieser Kugel erhalten wir das ebene Bildfeld der linearen Kongruenz. Seine Fundamentalpunkte fallen in die unendlichfernen Kreispunkte. Ein gegebener Kreis k^2 ist das Bild einer einscharig in der linearen Kongruenz enthaltenen Fläche zweiter Ordnung K^2. Seine ∞^2 Orthogonalkreise repräsentieren die ∞^2 für K^2 polarinvarianten Flächen zweiter Ordnung der linearen Kongruenz.

Die durch eine Inversion in sich überführbaren Kurven hat Moutard [5]) behandelt und als „anallagmatische" Kurven bezeichnet. Sie werden hier „selbstinverse" Kurven genannt. Eine gegebene selbstinverse Kurve ist Hüllkurve von Orthogonalkreisen

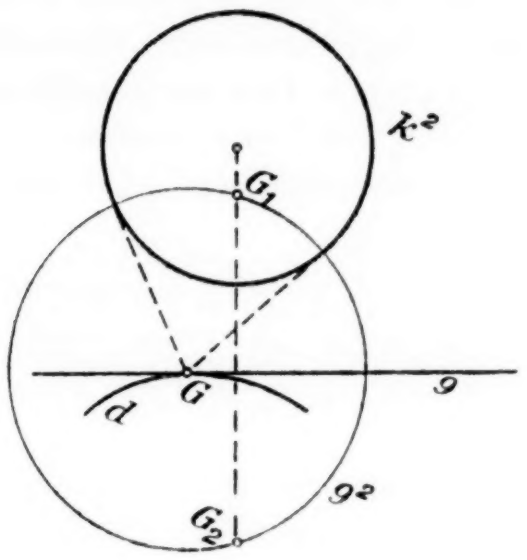

Fig. 10.

des Inversionskreises, und jede Hüllkurve von Orthogonalkreisen des Inversionskreises ist selbstinvers. Jeder Orthogonalkreis, der Hüllkreis ist, berührt die selbstinverse Kurve in zwei inversen Punkten. Die Mittelpunkte der Hüllkreise erfüllen eine Kurve, den Deferenten [6]). Eine selbstinverse Kurve ist durch ihren Deferenten und den Inversionskreis k^2 bestimmt. Sie ist folgendermaßen zu konstruieren (Fig. 10): Um einen gegebenen Punkt G des Deferenten gibt es zu k^2 einen Orthogonalkreis g^2. Es sei g die Tangente des Deferenten in G. Der zu g senkrechte Inversionsdurchmesser schneidet den Hüllkreis g^2 in zwei inversen Punkten G_1, G_2. Sie sind die Berührungspunkte des Hüllkreises g^2 mit der selbstinversen Kurve. Die Punkte des Deferenten werden dem unendlichfernen Elemente der Ebene durch die Hüllkreise invers zugeordnet.

Der Kreis k^2 repräsentiert eine einscharig in der Kongruenz enthaltene Fläche zweiter Ordnung K^2, die Hüllkreise stellen als Orthogonalkreise die für K^2 polarinvarianten einscharig in der Kongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung dar. Je zwei Berührungspunkte G_1, G_2 eines solchen Hüllkreises sind Bilder zweier reziprok polaren Strahlen im polaren Raume von K^2.

Aus der Konstruktion einer selbstinversen Kurve folgt für die mit ihren Regelscharen in der linearen Kongruenz C_1^1 enthaltenen Hüllflächen:

Im polaren Raume einer einscharig in der Kongruenz C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung K^2 geht jede Hüllfläche der für K^2 polarinvarianten, einscharig in C_1^1 liegenden Flächen zweiter Ordnung in sich über. Die Regelstrahlen der Hüllfläche sind als reziproke Polare im polaren Raume von K^2 involutorisch gepaart. Umgekehrt ist jede für K^2 polarinvariante, mit ihrer Regelschar in der Kongruenz enthaltene Fläche die Hüllfläche von ∞^1 Flächen zweiter Ordnung; sie sind für K^2 polarinvariant.

---

[5]) Moutard, Sur la transformation par rayons vecteurs reciproques, Nouv. Ann. (2) **3** (1864), S. 306—309.

[6]) De la Gournerie, Memoire sur les lignes spiriques, Journ. de Math. (2) **14** (1869), S. 9—64, 103—138.

17. Die mit ihren Regelscharen in der Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades erster Art als Hüllfläche.

Wird in der Ebene ε als Deferent ein Kegelschnitt d^2 gewählt, so ist die selbstinverse Kurve eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung k^4; sie hat die Kreispunkte (Fundamentalpunkte L, R) zu Doppelpunkten. Nach Abschnitt I, Nr. 2 ist k^4 das Bild einer Regelschar vierter Ordnung erster Art K^4. Ebenso stellt der nicht mit den Fundamentalpunkten inzidente Deferent d^2 eine Regelschar vierter Ordnung erster Art D^4 dar. Sie geht mit zwei (reellen oder konjugiert imaginären) Schalen durch den Kongruenzstrahl a $(0:0:0:1)$. Die Hüllkreise der Kurve k^4 liegen als Orthogonalkreise des Inversionskreises in einem Kreisbündel (16). Jeder Hüllkreis ordnet dem unendlichfernen Elemente der Ebene seinen Mittelpunkt invers zu. Das unendlichferne Element der Ebene ist das Bild des Kongruenzstrahles a. Die Hüllkreise repräsentieren ∞^1 Regelscharen zweiter Ordnung der Kongruenz, umhüllt von der Regelschar vierter Ordnung erster Art K^4. Aus alledem folgt:

Eine mit ihrer Regelschar in der linearen Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades erster Art K^4 umhüllt ∞^1 Regelflächen zweiten Grades eines Bündels. Die Strahlen der Regelfläche vierten Grades sind paarweise reziproke Polaren für die Polarregelfläche des Bündels.

Die ∞^1 Hüllflächen zweiten Grades von K^4 ordnen dem herausgegriffenen Kongruenzstrahle a die Regelstrahlen einer Regelfläche vierten Grades erster Art D^4 zu. Hierbei sind die Regelstrahlen von D^4 die Polaren von a für jene ∞^1 Hüllflächen zweiten Grades.

Dies Theorem bleibt auch bestehen bei einer Parabel als Deferenten. Die selbstinverse Kurve ist in diesem Falle eine durch die Fundamentalpunkte je einfach hindurchgehende Kurve dritter Ordnung. Diese stellt wiederum eine Regelfläche vierten Grades erster Art dar.

Eine gegebene mit ihrer Regelschar in der elliptischen linearen Kongruenz enthaltene Regelfläche vierten Grades zweiter Art ist polarinvariant für vier einscharig in der Kongruenz enthaltene Flächen zweiten Grades.

V. Clairaut's Differentialgleichung und die lineare Kongruenz.

18. Die Differentialgleichung Clairaut's:

$$y = xy' + f(y')$$

mit differenzierbar stetiger Funktion $f(y')$ von y' hat bekanntlich

$$y = Cx + f(C)$$

zum allgemeinen Integral. In der dargestellten Geradenschar bedeutet der Scharparameter C den Anstieg der einzelnen Geraden (Fig. 11). Die Hüllkurve der Geradenschar ist durch das singuläre Integral der Differentialgleichung gegeben. Die Geraden der

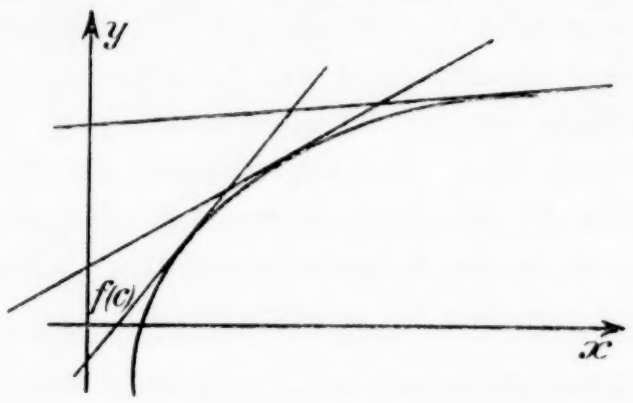

Fig. 11.

Bildebene sind aber die Bilder von ∞^2 durch einen herausgegriffenen Kongruenzstrahl a gehenden Regelscharen zweiter Ordnung der Kongruenz (2). Deshalb folgt für die lineare Kongruenz aus den Lösungen von Clairaut's Differentialgleichung das Theorem:

Die regulären Lösungen der Differentialgleichung Clairaut's werden dargestellt durch ∞^1 einscharig in der linearen Kongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades. Sie gehen durch einen festen Kongruenzstrahl a und umhüllen eine mit ihrer Regelschar in der Kongruenz enthaltene (algebraische oder transzendente) Regelfläche. Diese Hüllfläche ist durch das singuläre Integral der Differentialgleichung gegeben.

VI. Die Differentialgleichung erster Ordnung und die lineare Kongruenz.

19. In der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

gewährleistet das auf die Lipschitz-Bedingung gegründete Existenztheorem, *eine* durch einen gegebenen Punkt gehende stetige Lösung mit stetiger erster Ableitung. Eine Stelle, an der die eine oder andere Voraussetzung des Existenztheorems nicht erfüllt ist, heißt eine singuläre Stelle des Feldes. Die homogene Differentialgleichung und die umfassendere Klasse der Differentialgleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ax + By + \delta(x, y)}{Cx + Dy + \varepsilon(x, y)} \qquad (\delta,\ \varepsilon \text{ Potenzreihenentwicklungen nach } x,\ y),$$

weisen bekanntlich vier Typen von singulären Stellen auf, nämlich: den Sattelpunkt mit zwei voneinander verschiedenen Lösungen, den Wirbelpunkt, der als isolierter Punkt von den Integralkurven umschlossen wird, den Strudelpunkt mit asymptotischem Verhalten der Integralkurven in seiner Umgebung und den Knotenpunkt, durch den ∞^1 Integralkurven verlaufen.

Die Untersuchungen des Abschnittes III lieferten die Bedeutung des Bogenelementes und des Krümmungskreises der Bildebene für die Geometrie auf der linearen Strahlenkongruenz und für die verschiedenen Typen von Regelstrahlen einer in der Kongruenz liegenden (algebraischen oder transzendenten) Regelschar. Infolgedessen findet die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung nicht nur auf der Ebene sondern jetzt auch auf der linearen Strahlenkongruenz ihre Deutung. Die Integralkurven stellen wohlbestimmte Systeme von Regelscharen dar, und die vier angeführten Typen von singulären Stellen der Ebene bestimmen auf der Kongruenz analoge Singularitäten. Es tritt aber bei dieser neuen Deutung der Differentialgleichungen das wichtige Moment hinzu, daß ein reguläres Bogenelement einer Integralkurve der Bildebene je nach seiner Lage zu deren singulären Fundamentalpunkten L, R einen gewöhnlichen Regelstrahl, einen Torsalstrahl, einen Wenderegelstrahl oder noch einen anderen Typus repräsentiert. Das in der Bildebene gewonnene Lösungssystem einer Differentialgleichung ist also bei der Übertragung auf die lineare Kongruenz noch in dieser Richtung zu diskutieren.

20. Unter diesem Gesichtspunkte werde die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung in impliziter Form betrachtet:

$$f(x, y, y') = 0.$$

Die singulären Elemente sind die den beiden Gleichungen $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ genügenden Wertetripel x, y, y'. Durch Elimination von y' aus beiden Gleichungen ergibt sich die Diskriminantenkurve. Die Diskriminantenkurve ist überall da singuläre Lösung, wo

ihre Richtung mit der in ihren Punkten vorgeschriebenen Feldrichtung übereinstimmt. An allen anderen Stellen kann sie der Ort von singulären Punkten der regulären Integralkurven sein oder eine reguläre Lösung darstellen. Jede Hüllkurve einer Integralkurvenschar ist singuläre Lösung und als solche in der Diskriminantenkurve enthalten. Hieraus ergibt sich:

Die regulären Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung führen zu einem System $S(R)$ allgemeiner Regelscharen der linearen Kongruenz. Ist die Diskriminantenkurve in der Bildebene eine Hüllkurve der regulären Integralkurven, so repräsentiert sie die mit ihrer Regelschar in der Kongruenz enthaltene Hüllfläche der Regelscharen $S(R)$. Ist aber die Diskriminantenkurve in der Bildebene der Ort singulärer Punkte der Integralkurven, so wird auch die durch sie dargestellte Regelschar von den singulären Regelstrahlen jener Regelscharen $S(R)$ erfüllt.

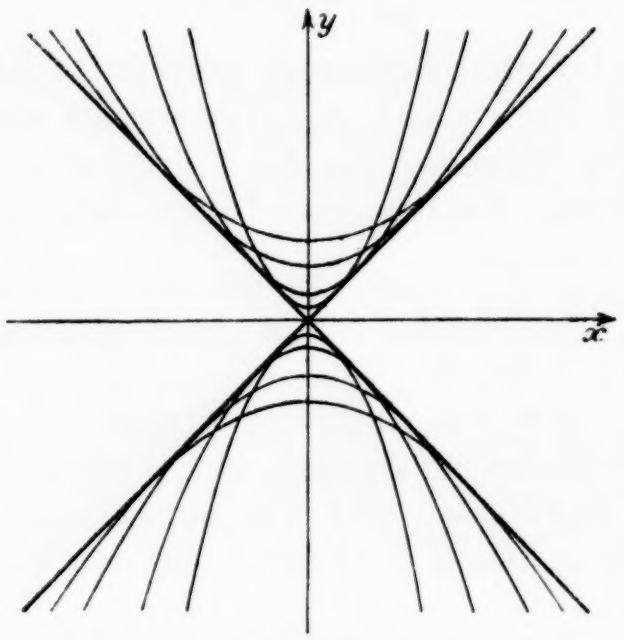

Fig. 12.

21. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$xy'^2 - 2yy' + x = 0$$

ist die Parabelschargleichung:

$$y = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2} \qquad \text{(Fig. 12).}$$

Die Parabeln haben die y-Achse gemeinschaftlich zur Hauptachse und umhüllen die beiden Geraden $y = \pm x$ als zwei singuläre Integrale. Damit ist auch die Bedeutung der angegebenen Differentialgleichung für die Geometrie der hyperbolischen linearen Kongruenz erkennbar:

Die Lösungen der Differentialgleichung $xy'^2 - 2yy' + x = 0$ führen zu ∞^1 in der Kongruenz enthaltenen Regelscharen vierter Ordnung erster Art. Sie berühren einander längs eines Regelstrahls und haben einen zweiten Kongruenzstrahl a als Doppelregelstrahl gemein. Sie werden von zwei durch a gehenden Regelscharen zweiter Ordnung umhüllt.

Wird das Koordinatenkreuz der Ebene so gewählt, daß die eine der beiden Geraden $y = \pm x$ durch den einen Fundamentalpunkt L, die andere durch den Fundamentalpunkt R geht, so umhüllen die ∞^1 Regelscharen vierter Ordnung zwei Kongruenzstrahlenbüschel erster Ordnung. Die Ebenen a_1, a_2 der beiden Büschel schneiden einander in dem gemeinsamen Doppelregelstrahl a der Regelscharen vierter Ordnung. Jede Regelschar vierter Ordnung berührt a_1 und a_2 je in einem Kongruenzstrahle, mit anderen Worten: Die beiden einhüllenden Ebenen sind gemeinsame Torsalebenen der Träger-

flächen jener Regelscharen vierter Ordnung, und jede der beiden Ebenen enthält einen Torsalstrahl jeder Regelschar.

Dieser Sonderfall kann durch keine Kollineation der linearen Kongruenz in sich auf den vorhin angegebenen allgemeinen Fall der Lösung zurückgeführt werden.

Die Differentialgleichung:

$$64\,xy'^2 - (9\,x - \alpha)^2 = 0$$

hat als reguläre Integralkurven die rationalen Kurven dritter Ordnung:

$$4y = (3x - \alpha)\sqrt{x} - c \qquad \text{(Fig. 13).}$$

Die Gerade $x = \frac{\alpha}{3}$ ist der Ort der Doppelpunkte dieser Kurven. Die Gerade $x = 0$ ist ihre Hüllkurve und die singuläre Lösung. Die Gerade $x = \frac{\alpha}{9}$ ist der Ort gegenseitiger Berührung je zweier Integralkurven. Für die lineare Kongruenz folgt hieraus:

Die Differentialgleichung $64\,xy'^2 - (9\,x - \alpha)^2 = 0$ *bestimmt durch ihre regulären Integrale* ∞^1 *Regelscharen sechster Ordnung der linearen Kongruenz. Die Regelscharen haben alle denselben Kongruenzstrahl a zum dreifachen Regelstrahl. Jede von ihnen hat*

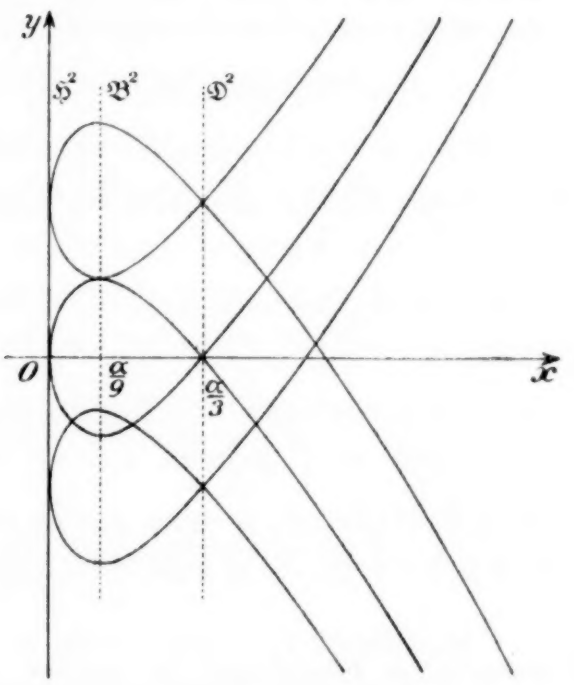

Fig. 13.

außerdem einen Doppelregelstrahl. Die Doppelregelstrahlen erfüllen eine Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{D}^2$. *Die* ∞^1 *Regelscharen sechster Ordnung werden von einer Regelschar zweiter Ordnung* $\mathfrak{H}^2$ *umhüllt. Je zwei von ihnen berühren einander in einem Kongruenzstrahle. Die* ∞^1 *Berührungsstrahlen erfüllen eine Regelschar zweiter Ordnung* $\mathfrak{B}^2$. *Die drei Regelscharen zweiter Ordnung* $\mathfrak{D}^2$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{H}^2$ *gehen durch den dreifachen Strahl a und durch einen zweiten gemeinsamen Kongruenzstrahl, liegen also in einem Büschel.*

Eingegangen 10. Januar 1935.

Takagische Klassenkörpertheorie, Hassesche Reziprozitätsformel und Fermatsche Vermutung.

Von *L. Holzer* in Graz.

In den §§ 1, 2 wollen wir uns mit dem Fall I der Fermatschen Gleichung beschäftigen, d. h. dem Fall, daß die drei Zahlen α, β, γ der Gleichung $\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$ ganze und zu l prime Zahlen des Kreisteilungskörpers der l-ten Einheitswurzeln sind. Es folgt über das bekannte Ergebnis hinaus, daß die Klassenzahl des Kreisteilungskörpers durch l teilbar sein muß, der nicht neue, aber anscheinend explizit noch nicht ausgesprochene Satz:

Gibt es im Körper der l-ten Einheitswurzeln eine Einheit ε, *die* $\varepsilon \underset{(l)}{\equiv} 1 \bmod. \lambda^{l-3}$ *erfüllt, ohne die schärfere Kongruenz* $\varepsilon \underset{(l)}{\equiv} 1 \bmod. \lambda^l$ *zu erfüllen, so ist die Fermatsche Gleichung in ganzen zu l teilerfremden Zahlen des Kreisteilungskörpers unmöglich.* Hierbei ist $\lambda = 1 - \zeta$.

§ 3 gibt Analoga zu den Furtwänglerschen Sätzen. Beweismittel ist hier wie in § 4 die Hassesche Reziprozitätsformel.

§ 4 stellt als Aufgabe die Untersuchung der Bedingungen, unter denen eine Gleichung $\alpha_1^l + \alpha_2^l + \alpha_3^l = 0$ mit ganzen zu l primen Zahlen eines quadratischen Körpers $\Omega_0 = R(\sqrt{m})$ — R der natürliche Zahlkörper, m eine ganze rationale quadratfreie Zahl — unmöglich ist; die α_i sollen zu l prim sein. Als zusammenfassendes Ergebnis nennen wir die Sätze [1]):

Das Bestehen einer Fermatschen Gleichung in ganzen zu l primen Zahlen aus Ω_0 *erfordert die Kongruenz* $2^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$, *wenn*

a) (Satz **11**) $m \equiv 2, 3 \bmod. 4$ *ist.* Eine einschränkende Bedingung für l wie in den Fällen b, c tritt hier nicht hinzu.

b) (Satz **12**) $m \equiv 5 \bmod. 8$, *weiter* $l \equiv 5 \bmod. 6$ *ist und l in* Ω_0 *nicht Primideal bleibt.*

c) (Satz **14**) $m \equiv 1 \bmod. 8$ *ist, weiter l in* Ω_0 *in zwei verschiedene Primideale zerfällt und die beiden Primteiler* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}'$ *von 2 in* Ω_0 *in bezug auf die Hauptklasse von* Ω_0 *von zu l primer Ordnung sind* (also z. B. sicher dann, wenn die Klassenzahl von Ω_0 durch l nicht teilbar ist).

Eine Fermatsche Gleichung mit zu l primen Zahlen aus Ω_0 *ist unmöglich, wenn*

d) (Satz **13**) $m \equiv 5 \bmod. 8$ *und* $l = 3$ *ist.*

e) (Satz **15**) $p = 2l + 1$ *Primzahl und in* Ω_0 *kritisch ist.*

f) (Satz **16**) $p = 2l + 1$ *Primzahl ist, in* Ω_0 *in zwei verschiedene Primideale zerfällt,*

[1]) Die Nummern sind dieselben wie in § 4.

die in bezug auf die Hauptklasse von Ω_0 eine zu l prime Ordnung haben, und überdies l in zwei verschiedene Primideale zerfällt.

Endlich g) (Satz **17**): *Ist* $3 \mid m$, $l \equiv 5 \bmod. 6$ *und bleibt l in Ω_0 nicht Primideal, so erfordert das Bestehen einer Fermatschen Gleichung in zu l primen Zahlen aus Ω_0 die Kongruenz* $3^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.

a, b, c, g sind Analoga zum Wieferichschen Satze, e, f zu dem von Legendre und Sophie Germain für den Fall I in R.

Wir wollen zuerst die verwendeten Bezeichnungen anschreiben. Dabei richten wir uns soweit als möglich nach Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlen, wobei wir im Text den ersten Teil als Hasse I und Hasse Ia nach dem 1930 erschienenen vereinigten Sonderdruck zitieren werden [2]), sowie nach dem zweiten Teil (1930, zitiert als Hasse II).

Es sei

l eine natürliche ungerade Primzahl,

R der natürliche Rationalitätsbereich,

k der Kreisteilungskörper der l-ten Einheitswurzeln,

ζ eine primitive (nicht näher bestimmte) l-te Einheitswurzel,

$\lambda = 1 - \zeta$,

$\mathfrak{a}$ (in § 2) die Gruppe der Ideale $\neq 0$, (α) in § 2 die Gruppe der Hauptideale $\neq 0$ in k. Diese Gruppen sollen stets nach dem Modul erklärt sein, der sich bei einer andern Gruppe in dem jeweils besprochenen Index findet.

K sei in § 2 ein dort näher bestimmter Körper, zyklisch vom Grade l über k.

$S_{\mathfrak{m}}$ bezeichne den Idealstrahl nach $\mathfrak{m}$ in k, d. h. die Gruppe aller zu $\mathfrak{m}$ primen Hauptideale in k, unter deren Erzeugenden mindestens eine Zahl $\equiv 1 \bmod. \mathfrak{m}$ vorkommt.

ε sei eine Einheit in k.

k_0 sei der maximale reelle Teilkörper von k, der Durchschnitt von k mit dem Körper aller reellen Zahlen.

$\Omega_0 = R(\sqrt{m})$ sei ein absolutquadratischer Körper, $\Omega = \Omega_0 k$.

$\mathfrak{l}_1$ sei einer der Primteiler von l in Ω_0.

$S(\xi)$ sei die Absolutspur einer Zahl ξ bezüglich R.

p sei eine von l verschiedene Primzahl in R.

Π_q sei der Primkörper der Charakteristik q, e sein Einselement.

h_0 sei die Klassenzahl in Ω_0, h die in k.

ε_a sei eine Einheit in k, die nach λ Einseinheit genau a-ten Grades ist.

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ sei das Symbol der l-ten Potenzreste.

Das Produkt zweier Gruppen $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ ist zu verstehen als die Menge aller Elemente, die Produkt eines Elements von $\mathfrak{M}$ und eines Elements aus $\mathfrak{N}$ sind. Eine Gruppe ist $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ in unsern Fällen immer, da nur abelsche Gruppen vorkommen.

Den Durchschnitt zweier Gruppen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — bekanntlich wieder eine Gruppe — bezeichnen wir mit $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$.

In den §§ 1, 2, 3 wollen wir $l = 3$ ausschließen, da die Unmöglichkeit des Falles I der Fermatschen Gleichung in Zahlen des Kreisteilungskörpers der dritten Einheitswurzeln sehr einfach auf anderm Wege bewiesen werden kann. Sie ergibt sich übrigens als Spezialfall des Satzes **13** in § 4. In § 4 dagegen sei $l = 3$ inbegriffen.

---

[2]) Der Urdruck erschien im Jahr. Ber. d. D. M. V. **35** (1927), S. 1–55, und **36** (1928), S. 233–311.

§ 1.

Gegeben sei eine Gleichung $\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$, wo α, β, γ ganze durch λ nicht teilbare Zahlen aus k sind.

Man erhält in bekannter Art:

$$(\alpha + \beta\zeta^i) = \mathfrak{j}_i^l \mathfrak{d} \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1),$$

wo die $\mathfrak{j}_i$ paarweise teilerfremde Ideale aus k sind.

Mit der Abkürzung $\eta_{ij} = \dfrac{\alpha + \beta\zeta^i}{\alpha + \beta\zeta^j}$ gibt paarweise Division die Idealgleichungen:

$$(\eta_{ij}) = \mathfrak{m}_{ij}^l \quad (i, j = 0, 1, \ldots, l-1, j = 0, 1, \ldots, l-1),$$

wo die $\mathfrak{m}_{ij}$ (im allgemeinen gebrochene) Ideale sind.

Es existiere in k eine Einheit $\varepsilon \underset{(l)}{\equiv} 1$ mod. λ^{l-3} oder, was auf dasselbe hinausläuft, eine Einheit $\varepsilon' \equiv 1$ mod. λ^{l-3}. Daß beides gleichbedeutend ist, ist sofort klar: Ist ε gegeben, so genügt es $\varepsilon' = \varepsilon^{l-1}$ zu setzen. Ist ein ε' gegeben, so erfüllt es die Bedingungen für ε.

Einer Anregung von Herrn Hasse folgend wollen wir im Gegensatz zur ersten (nicht veröffentlichten) Fassung der Arbeit, in der die Takagische Klassenkörpertheorie, aber nicht die Reziprozitätsgesetze angewendet wurden, einen von ihm herrührenden Hilfssatz anwenden:

Hifsssatz 1 (von H. Hasse). Die gleichzeitige Existenz einer l-ten Idealpotenz (z. B. einer Einheit) γ_n, die nach λ Einseinheit n-ten Grades ist, und einer l-ten Idealpotenz (speziell Einheit) ε_{l-n}, die nach λ Einseinheit $(l-n)$-ten Grades ist, ist unvereinbar. (n ganz, rational, $0 < n < l$.)

Beweis. Bei Annahme eines solchen γ_n und ε_{l-n} ist einerseits

$$\left(\frac{\gamma_n}{\varepsilon_{l-n}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_{l-n}}{\gamma_n}\right) = 1,$$

anderseits nach der Takagischen Formel [Hasse II, § 21, 3, S. 108, Formeln (i) und (ii)], wenn $\gamma_n \equiv 1 - u\lambda^n$ mod. λ^{n+1}, $\varepsilon_{l-n} \equiv 1 - v\lambda^{l-n}$ mod. λ^{l-n+1} mit ganzen rationalen u, v gesetzt wird,

$$\left(\frac{\gamma_n}{\varepsilon_{l-n}}\right)\left(\frac{\varepsilon_{l-n}}{\gamma_n}\right)^{-1} = \left(\frac{\varepsilon_{l-n}, \gamma_n}{\lambda}\right) = \zeta^{nuv}.$$

Da alle drei Zahlen n, u, v zu l prim sind, ergibt sich ein Widerspruch.

Nun läßt sich aber aus der Fermatschen Gleichung leicht die Existenz eines γ_3 erschließen. Wir verwenden den Hilfssatz:

Hilfssatz 2. Zu jedem $l \geqq 5$ gibt es zwei Zahlentripel

$$(a_1, a_2, a_3), \qquad (a_1', a_2', a_3')$$

so, daß die Kongruenzen

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} a_j' \text{ mod.}^+ l, \quad \sum_{i,j=1, i<j}^{3} a_i a_j \equiv \sum_{i,j=1, i<j}^{3} a_i' a_j' \text{ mod.}^+ l$$

erfüllt sind, hingegen $a_1 a_2 a_3 \not\equiv a_1' a_2' a_3'$ mod.$^+$ l ist.

Beweis. Wird über Π_l die Gesamtheit aller Polynome

$$\prod_{i=1}^{3} (x - a_i e) + n e$$

mit a_i und n als ganzen rationalen nichtnegativen Zahlen $< l$ ohne Rücksicht auf die Reihenfolge der a_i betrachtet, so ist ihre Anzahl formal gleich $m(l) = \frac{l^2}{6}(l+1)(l+2)$. Über Π_l gibt es aber nur l^3 normierte Polynome dritten Grades. Für $l \geqq 5$ ist $m(l) > l^3$, also müssen unter diesen Polynomen gleiche vorkommen, die sich nicht nur durch die Reihenfolge der a_i unterscheiden. Aus

$$\prod_{i=1}^{3}(x - a_i e) + ne = \prod_{i=1}^{3}(x - a_i' e) + n'e$$

folgt zunächst $n \not\equiv n' \bmod.^+ l$, da sonst die a_i mit den a_i' wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit von Polynomen in einem Körper bis auf die Reihenfolge übereinstimmten. Hieraus folgt sofort der Satz.

Wir setzen $\gamma_3 = \eta_{a_1 a_1'}\ \eta_{a_2 a_2'}\ \eta_{a_3 a_3'}$.

Nach leichter Rechnung ergibt sich mit den Abkürzungen $a_1 a_2 a_3 - a_1' a_2' a_3' = m$ und

$$\frac{\beta}{\alpha + \beta} = \xi:$$

$$\gamma_3 \equiv 1 - \lambda^3 \frac{m}{2}(\xi - 1)\ (2\xi - 1) \bmod.\ \lambda^4.$$

Wegen $m \not\equiv 0 \bmod.^+ l$, also auch $\bmod.^+ \lambda$ ist γ_3 nur dann Einseinheit vierten oder höheren Grades, wenn entweder $\xi \equiv 1 \bmod.^+ \lambda$, also $\alpha \equiv 0 \bmod. \lambda$, im Widerspruch zur Voraussetzung, oder $2\xi \equiv 1 \bmod. \lambda$, d. h. $\alpha \equiv \beta \bmod. \lambda$. Ersetzung von β durch γ führt im letzteren Falle doch auf ein γ_3, das Einseinheit dritten Grades nach λ ist. Denn sonst müßte auch $\alpha \equiv \gamma \bmod. \lambda$ sein, und aus der Fermatschen Gleichung folgte $3\alpha^l \equiv 0 \bmod.^+ \lambda$, was unrichtig ist, da weder 3 noch α durch das Primideal (λ) in k teilbar sind. Es folgt der in der Einleitung erwähnte Satz:

Gibt es in k eine Einheit $\varepsilon \underset{(l)}{\equiv} 1 \bmod. \lambda^{l-3}$, *die nicht die schärfere Kongruenz* $\varepsilon \underset{(l)}{\equiv} 1 \bmod. \lambda^l$ *erfüllt, so ist der Fall* I *der Fermatschen Gleichung in k unmöglich.*

Beweis. Aus Hilfssatz 1 folgt sofort, daß $\varepsilon' = \varepsilon^{l-1}$ kein ε_{l-3} ist. Wir brauchen nun nur noch wieder aus diesem Satz zu zeigen, daß ε' kein ε_{l-2} oder ε_{l-1} ist. Ersteres bringt uns in Widerspruch zur Existenz der Einheit $\varepsilon_2 = (\zeta + \zeta^{-1})^{l-1}$, letzteres zu der von $\varepsilon_1 = \zeta$.

§ 2.

Zum Nachweis der Unmöglichkeit des Falles der Fermatschen Gleichung in k für $h \not\equiv 0 \bmod.^+ l$ bedarf es noch des Nachweises der Existenz einer solchen Einheit für reguläre Kreisteilungskörper [3]). Doch läßt sich der Beweis mit Hilfe der Takagischen Idealgruppentheorie viel schöner führen.

Wir bemerken, daß nach Satz 127 des Hilbertschen Zahlberichtes gilt: Eine beliebige Einheit in k ist das Produkt einer Einheitswurzel und einer Einheit in k_0. Hieraus folgt sofort, daß es keine Einheiten gibt, die $\underset{(l)}{\equiv} 1 \bmod. \lambda^3$, aber $\underset{(l)}{\not\equiv} 1 \bmod. \lambda^4$ sind.

Wir machen uns einen Gedankengang zu eigen, der von Takagi herrührt [4]). Existiere eine Einheit ε_a. Dies ist mit der Idealstrahlgleichung $S_{\lambda^a} = S_{\lambda^{a+1}}$ gleichbedeutend. Umgekehrt zieht diese Idealstrahlgleichung die Existenz eines solchen ε_a nach sich.

---

[3]) Vgl. Hilbert, Zahlbericht, Hilfssatz 29, § 138.

[4]) Journal f. Math. **157** (1926), S. 236.

Nun gibt es aber in k wegen $h \not\equiv 0 \bmod.^{+} l$ keine mod. 1 oder auch wegen Hasse Ia, Satz 3_2, S. 75 unter Heranziehung des Satzes der Gleichheit von Modul und Führer keine mod. λ erklärbare Idealgruppe vom Index l gegenüber der Gesamtgruppe, es ist somit $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^l(\alpha) = \mathfrak{a}^l S_\lambda$. Wegen des Auftretens von $\varepsilon_1 = \zeta$, $\varepsilon_2 = \left(\zeta + \zeta^{-1}\right)^{l-1}$ ist weiter $S_\lambda = S_{\lambda^2} = S_{\lambda^3}$ oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^l S_{\lambda^3}$. Es wird

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^l S_{\lambda^4}) = (\mathfrak{a}^l S_{\lambda^4} S_{\lambda^3} : \mathfrak{a}^l S_{\lambda^4}),$$

und dies wird unter Heranziehung des Hasseschen Reduktionsprinzips (Hasse Ia, S. 58) gleich $(S_{\lambda^3} : S)$, wenn S zur Abkürzung für $[S_{\lambda^3}, \mathfrak{a}^l S_{\lambda^4}]$ gesetzt wird. — Weiter gilt, da es kein ε_3 gibt, $S_{\lambda^3} > S_{\lambda^4}$, d. h. $(S_{\lambda^3} : S_{\lambda^4}) = l$.

Sicher ist $S \geqq S_{\lambda^4}$. Sei $\mathfrak{a}^l(\eta_4)$ mit $\eta_4 \equiv 1 \bmod. \lambda^4$ ein Ideal aus S. Da es zu S_{λ^3} gehören soll, also ein Hauptideal sein muß, so muß wegen $h \not\equiv 0 \bmod.^{+} l$ mit $\mathfrak{a}^l$ auch $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal sein, etwa $\mathfrak{a} = (\alpha)$. Weiter muß $\alpha^l \eta_4 \equiv \varepsilon \bmod. \lambda^3$ sein, wo ε eine Einheit in k ist. Daraus folgt $\varepsilon \underset{(l)}{\equiv} 1 \bmod. \lambda^3$, d. h. $\varepsilon \underset{(l)}{\equiv} 1 \bmod. \lambda^4$. Somit ist $\alpha^l \eta_4 \varepsilon^{-1} \underset{(l)}{\equiv} 1 \bmod. \lambda^4$; im Verein mit $\alpha^l \eta_4 \varepsilon^{-1} \equiv 1 \bmod. \lambda^3$ gibt dies $\alpha^l \eta_4 \varepsilon^{-1} \equiv 1 \bmod. \lambda^4$, d. h. $(\alpha^l \eta_4)$ liegt in S_{λ^4}, jedes $\mathfrak{a}^l(\eta_4)$, das Element von S_{λ^3} ist, liegt in S_{λ^4}. Es folgt $S \leqq S_{\lambda^4}$, d. h. $S = S_{\lambda^4}$.

Wir erhalten $(\mathfrak{a} : \mathfrak{a}^l S_{\lambda^4}) = l$. Es ist somit $\mathfrak{a}^l S_{\lambda^4}$ Idealgruppe zu einem Körper $K = k(\sqrt[l]{\mu})$. $\mathfrak{a}^l S_{\lambda^4}$ enthält S_{λ^3} nicht, es ist somit λ^4 Führer dieser Idealgruppe. Enthielte μ irgendwelche Primideale $\neq \lambda$ in einer andern als einer al-ten Potenz, so müßten diese im Führer auftreten, bzw. wäre μ durch λ in einer andern als einer bl-ten Potenz teilbar, so wäre der Führer durch λ^{l+1} teilbar. (Hierbei sind a und b ganze rationale Zahlen.) μ ist somit eine l-te Idealpotenz, also wegen $h \not\equiv 0 \bmod.^{+} l$ etwa $\mu = (\mu_1^l)$ oder $\mu = \mu_1^l \varepsilon$, wo ε eine Einheit ist, d. h. $\mu \underset{(l)}{=} \varepsilon$. Von dieser Einheit ε gilt dann $\varepsilon \underset{(l)}{\equiv} 1 \bmod. \lambda^{l-3}$, $\underset{(l)}{\not\equiv} 1 \bmod. \lambda^{l-2}$.

Eine genauere Untersuchung des Zusammenhanges des Auftretens von Einheiten, die $\underset{(l)}{\equiv} 1$ nach den höhern Potenzen von λ sind und der Struktur der Idealklassengruppe von k findet sich in einer Arbeit von J. Herbrand [5]).

§ 3.

Genau so wie Herr Hasse in Hasse II, § 22, S. 120—122 die Furtwänglerschen Kriterien aus seiner Reziprozitätsformel

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \zeta^{s\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\,\frac{\beta-1}{l}\right)},$$

gültig für $\alpha \equiv 1 \bmod. \lambda$, $\beta \equiv 1 \bmod. l$, α und β prim zu l und zu einander [6]), sehr einfach, klar und durchsichtig abgeleitet hat, ergeben sich auch ähnliche Kriterien[7]). (Über die Formel vgl. Hasse II, § 16, S. 77 ff.).

---

[5]) J. Herbrand, Sur les classes des corps circulaires, Journal de Liouville (9) **11** (1932), S. 417—441.

[6]) Es würde genügen: die Kerne von α und β sind prim zu einander.

[7]) Auch hier habe ich mich wie auch in § 4 einer Anregung von Herrn Hasse folgend zu einer Umarbeitung entschlossen. Sei ganz kurz z. B. für den ersten Furtwänglerschen Satz die ursprüngliche, nur die Takagische Klassenkörpertheorie benützende Fassung angedeutet. Aus der Fermatschen Gleichung folgt, daß $\alpha = \dfrac{x + y\zeta}{x + y}$ l-te Idealpotenz ist; ist also r ein Primteiler von y, so liegt (α) in der Idealgruppe des Körpers $K = k(\sqrt[l]{r})$ bezüglich k. Aus

Gegeben sei eine Fermatsche Gleichung $x^l + y^l + z^l = 0$ mit ganzen rationalen, zu l primen Zahlen, die überdies — was bekanntlich keine Einschränkung ist — auch zu einander paarweise prim sein sollen.

Satz. Für jedes $\beta \neq 0$ aus k gilt $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1$. Dabei ist α ein beliebiges Potenzprodukt der l-ten Idealpotenzen $x + \zeta^i y$, $y + \zeta^{i'} z$, $z + \zeta^{i''} x$ mit Einheiten aus k. i, i', i'' sind beliebige ganze rationale Zahlen.

Der Beweis ist völlig analog dem des von Herrn Hasse a. a. O. unter Nr. 2, S. 114 angeführten Satzes, der von dem hier entwickelten ein Spezialfall ist.

1. Sei jetzt r ein rationaler Primteiler von $xy - z^2$. Wir setzen

$$\alpha = \left(\frac{x + z\zeta}{z + y\zeta}\right)^{l-1} = \left(\frac{x}{z}\right)^{l-1} \left(\frac{1 + \frac{z}{x}\zeta}{1 + \frac{y}{z}\zeta}\right)^{l-1}.$$

Es ist dann $\alpha \equiv 1 \bmod. \lambda$, $r^{l-1} \equiv 1 \bmod. l$, daher gibt die Hassesche Reziprozitätsformel:

$$\left(\frac{\alpha}{r^{l-1}}\right)^{-1} \left(\frac{r^{l-1}}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda} \frac{r^{l-1}-1}{l}\right)}.$$

Nach dem vorigen Satz ist $\left(\frac{r^{l-1}}{\alpha}\right) = 1$; wegen $\alpha \equiv m \bmod. r$, wo für den Augenblick m für $\left(\frac{x}{z}\right)^{l-1}$ geschrieben wird, ist $\left(\frac{\alpha}{r^{l-1}}\right) = \left(\frac{m}{r^{l-1}}\right) = 1$, letzteres folgt sofort durch Anwendung einer Substitution $\zeta \mid \zeta^{l-1}$ in k. Es ergibt sich:

$$S\left(\frac{\alpha - 1}{\lambda} \frac{r^{l-1} - 1}{l}\right) \equiv 0 \bmod.^+ l$$

oder

$$\frac{r^{l-1} - 1}{l} \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right) \equiv 0 \bmod.^+ l.$$

Sofort erhält man:

Ist $xy - z^2 \not\equiv 0 \bmod. l$, so erfüllt jeder Primteiler r dieser Zahl die Kongruenz $r^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.

2. Sei r ein rationaler Primteiler von $xy + z^2$. Dann führt die analoge Betrachtung mit der l-ten Idealpotenz

$$\alpha = \frac{(x + z\zeta)(z + y\zeta)(x + y\zeta^{-2})}{(x + z\zeta^{-1})(z + y\zeta^{-1})(x + y\zeta^2)}$$

zum Ergebnis:

Ist sowohl $x - y$, als auch $xy + z^2$ durch l nicht teilbar, so erfüllt jeder rationale Primteiler r dieser letzteren Zahl die Kongruenz $r^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.

---

der Kongruenz $\alpha \equiv 1 \bmod. r$ ersieht man nun leicht, daß die Idealgruppe den Strahl $S_{r\lambda}$ enthält, also $r\lambda^2$, was wegen $r \underset{(l)}{\equiv} 1 \bmod. l$ sicher ein zulässiger Erklärungsmodul für die Idealgruppe K/k ist, wegen Hasse I, S. 48, Erl. 7 nicht der Führer sein kann. Indes kann es wegen Hasse Ia, Satz 3_2, S. 75 auch nicht $r\lambda$ sein. Es ist somit (λ) in K/k nicht kritisch. Hieraus erschließt man leicht $r^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$, d. h. den ersten Furtwänglerschen Satz. In derselben Art können der zweite Furtwänglersche Satz (Hasse II, § 22, S. 121), die Sätze von § 3 und *teilweise* — unter vielfacher Modifikation der Methoden — auch die Sätze von § 4 hergeleitet werden.

§ 4.

1. Wir wollen eine Fermatsche Gleichung

$$\alpha_1^l + \alpha_2^l + \alpha_3^l = 0$$

in einem quadratischen Körper Ω_0 mit zu l primen ganzen α_i betrachten. Es sei $\Omega_0 = R(\sqrt{m})$, wo m ganz, rational und quadratfrei angenommen werden möge. Die Voraussetzungen wollen wir in der Regel nicht wieder anschreiben. In den Sätzen dieses Paragraphen von Nr. **11** ab wollen wir sie kurz mit *Fall* I *in* Ω_0 bezeichnen. Der Fall $\Omega_0 < k$, also $\Omega_0 = R\left(\sqrt{(-1)^{\frac{l-1}{2}} l}\right)$ sei ausdrücklich *nicht ausgenommen.*

Sei $\mathfrak{l}_1$ ein beliebiger Primteiler von l in Ω_0. (Bleibt l in Ω_0 Primideal, so ist $\mathfrak{l}_1 = l$ zu setzen.) Dann ist zunächst $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^l \equiv 0 \text{ mod.}^+ \mathfrak{l}_1$. Hieraus folgt, da der Restklassenkörper als vollkommener Körper der Charakteristik l den Automorphismus $a \to a^l$ und den inversen gestattet [8]), die Kongruenz $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \equiv 0 \text{ mod.}^+ \mathfrak{l}_1$.

Für irgendein ξ aus Ω_0 werde die absolutkonjugierte Zahl mit ξ' bezeichnet. Die analoge Bezeichnung wollen wir auch für Ideale verwenden.

Es folgt $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i'^l = 0$ und daraus $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i' \equiv 0 \text{ mod.}^+ \mathfrak{l}_1$.

2. Alle aus den Zahlen $\frac{\alpha_s + \alpha_t \zeta^i}{\alpha_s + \alpha_t \zeta^j}$, wo i, j beliebige ganze rationale Zahlen, s und t, $s \neq t$, die Zahlen 1, 2, 3 sein können, gebildeten Potenzprodukte α sind l-te Idealpotenzen. Der Beweis ist analog wie im Fall I der Fermatschen Vermutung in k. Für ein solches α und ein beliebiges $\beta \neq 0$ in Ω gilt

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1.$$

Die Anwendung dieser Gleichung führt zu Sätzen, die den Furtwänglerschen für den Fall I in R analog sind.

3. Sei r ein rationaler Teiler von α_2, der zu α_1 und α_3 prim ist Für $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \zeta}{\alpha_1 + \alpha_2}$ gilt dann $\left(\frac{\alpha}{r^{l-1}}\right) = \left(\frac{r^{l-1}}{\alpha}\right) = 1$. Wegen $\alpha \equiv 1 \text{ mod. } \lambda$, $r^{l-1} \equiv 1 \text{ mod. } l$ folgt aus der Hasseschen Reziprozitätsformel:

$$S\left(\frac{\alpha - 1}{\lambda} \frac{r^{l-1} - 1}{l}\right) \equiv \frac{r^{l-1} - 1}{l} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2'}{\alpha_1' + \alpha_2'}\right) \equiv 0 \text{ mod.}^+ l.$$

(Im Spezialfall $\Omega_0 < k$ ist im Nenner der rechten Seite $2l$ anstatt l zu setzen.)

Ist der Klammerausdruck der rechten Seite nicht durch l teilbar, so folgt daraus $r^{l-1} \equiv 1 \text{ mod. } l^2$. Ist diese Kongruenz nicht erfüllt, so folgt wegen $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \equiv 0 \text{ mod.}^+ \mathfrak{l}_1$ und $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i' \equiv 0 \text{ mod.}^+ \mathfrak{l}_1$ die Kongruenz $\frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_2'}{\alpha_3'} \equiv 0 \text{ mod.}^+ \mathfrak{l}_1$. Genau so könnte man in diesem Falle $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2'}{\alpha_1'} \equiv 0 \text{ mod.}^+ \mathfrak{l}_1$ erschließen, indem man α durch $\frac{\alpha_3 + \alpha_2 \zeta}{\alpha_3 + \alpha_2}$ ersetzt. Dann folgt aber $2\alpha_2\alpha_2' \equiv 0 \text{ mod.}^+ \mathfrak{l}_1$, was unrichtig ist, da sowohl 2 wie α_2 wie α_2' durch $\mathfrak{l}_1$ nicht teilbar sind. Es folgt:

---

[8]) Vgl. z. B. darüber Hasse, Aufgabensammlung zur Höheren Algebra, Berlin 1934, S. 133.

Ist die Fermatsche Gleichung in zu l primen ganzen Zahlen aus Ω_0 erfüllt, so genügt jeder rationale Teiler r einer der Zahlen der Kongruenz $r^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.

4. r sei ein rationaler Teiler von $\alpha_1 - \alpha_2$, der zu α_3 prim ist.

Mit $\alpha = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2\zeta^2}{\alpha_1 + \alpha_2\zeta}\dfrac{1+\zeta}{1+\zeta^2}$, also $(\alpha) = \left(\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2\zeta^2}{\alpha_1 + \alpha_2\zeta}\right)$, ist α l-te Idealpotenz, $\left(\dfrac{\alpha}{r^{l-1}}\right) = \left(\dfrac{r^{l-1}}{\alpha}\right) = 1$, es ergibt sich:

$$S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\,\frac{r^{l-1}-1}{l}\right) \equiv \frac{r^{l-1}-1}{l}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} + \frac{\alpha_2'}{\alpha_1'+\alpha_2'} - 1\right) \equiv 0 \bmod.^+ l.$$

(Wieder muß im Falle $\Omega_0 < k$ im Nenner rechts $2l$ statt l genommen werden. Die analoge Modifikation tritt auch bei weiteren Sätzen in der Beweismethode ein, ohne daß wir besonders darauf hinweisen.) Wird der Klammerausdruck $\equiv 0 \bmod.^+ \mathfrak{l}_1$ gesetzt, so führt er auf die Kongruenz $\alpha_1\alpha_1' \equiv \alpha_2\alpha_2' \bmod. \mathfrak{l}_1$, also auch mod. l. Wir erhalten:

Ist $\alpha_1\alpha_1' \not\equiv \alpha_2\alpha_2' \bmod. l$, so genügt jeder zu α_3 prime rationale Teiler r von $\alpha_1 - \alpha_2$ der Kongruenz $r^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.

5. r sei ein rationaler Teiler von $\alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2'$, der zu α_3 prim ist. Mit $\alpha = \left(\dfrac{(\alpha_1+\alpha_2\zeta)(\alpha_1'+\alpha_2'\zeta)}{(\alpha_2+\alpha_1\zeta)(\alpha_2'+\alpha_1'\zeta)}\right)^{l-1}$ erhalten wir:

$$\alpha \equiv 1 \bmod. r, \quad \alpha \equiv 1 \bmod. \lambda, \quad \left(\frac{\alpha}{r^{l-1}}\right) = \left(\frac{r^{l-1}}{\alpha}\right) = 1.$$

Es folgt:

$$S\left(\frac{\alpha-1}{\lambda}\,\frac{r^{l-1}-1}{l}\right) \equiv \frac{r^{l-1}-1}{2l}\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} + \frac{\alpha_1'-\alpha_2'}{\alpha_1'+\alpha_2'}\right) \equiv 0 \bmod.^+ l.$$

Da die Annahme, daß der Klammerausdruck durch l teilbar sei, wieder auf $\alpha_1\alpha_1' \equiv \alpha_2\alpha_2'$ mod. l führt, so folgt:

Ist $\alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2'$ durch l nicht teilbar, so genügt jeder rationale Teiler r dieser Zahl, der zu α_3 prim ist, der Kongruenz $r^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.

6. *Sei p in Ω_0 kritisch: $p = \mathfrak{p}^2$. Weiter sei $\mathfrak{p} \mid \alpha_2$, dagegen α_1 und α_3 zu $\mathfrak{p}$ prim. Dann ist $p^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.*

Beweis. Wir setzen $\alpha = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2\zeta}{\alpha_1 + \alpha_2}$. Dann ist $\alpha \equiv 1 \bmod. \mathfrak{p}$, $\alpha^p \equiv 1 \bmod. p$, es folgt $\left(\dfrac{\alpha^p}{p}\right) = 1$, also, da $p \not\equiv 0 \bmod.^+ l$ ist, $\left(\dfrac{\alpha}{p}\right) = 1$ und daraus $\left(\dfrac{\alpha}{p^{l-1}}\right) = 1$. Der weitere Beweis ist völlig analog dem unter **3**.

7. *Sei p in Ω_0 kritisch, $p = \mathfrak{p}^2$. Weiter sei $\mathfrak{p} \mid \alpha_1 - \alpha_2$, dagegen α_3 zu $\mathfrak{p}$* prim. *Dann ist $p^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$, falls $\alpha_1\alpha_1' \not\equiv \alpha_2\alpha_2' \bmod. l$ ist.*

Beweis. Mit demselben α wie unter **4** erhalten wir einen fast gleichen Beweis wie dort, da $\alpha^p \equiv 1 \bmod. p$ wird und daraus, wie unter **6**, $\left(\dfrac{\alpha}{p^{l-1}}\right) = 1$ folgt.

8. *Zerfällt l in Ω_0/R in zwei verschiedene Primideale, so ist* $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_1' & \alpha_3' \end{vmatrix} \equiv 0 \bmod.^+ \mathfrak{l}_1$ *notwendig und hinreichend, damit die Matrix* $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \end{pmatrix} \bmod.^+ l$ *den Rang 1 hat*[9]).

---

[9]) Da die α_i zu l prim sind, so ist der Rang 0 mod.$^+$ l ausgeschlossen.

Beweis. Daß $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_1' & \alpha_3' \end{vmatrix} \equiv 0 \bmod.^+ \mathfrak{l}_1$ notwendig ist, ist klar. Daß es auch genügt, damit $\mathfrak{A}$ den Rang 1 hat, folgt so: Anwendung des Automorphismus $\sqrt{m} \mid -\sqrt{m}$ in Ω_0 gibt $\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_3' \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix} \equiv 0 \bmod.^+ \mathfrak{l}_1'$, d. h. $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_1' & \alpha_3' \end{vmatrix} \equiv 0 \bmod.^+ l$. Da unter den Voraussetzungen des Satzes sich $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \equiv \sum_{i=1}^{3} \alpha_i' \equiv 0 \bmod.^+ l$ ergibt, so folgt:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1' & \alpha_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1' & \alpha_1' + \alpha_2' \end{vmatrix} \equiv - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_1' & \alpha_3' \end{vmatrix} \equiv 0 \bmod.^+ l,$$

womit alles gezeigt ist.

9. *Es zerfalle l in Ω_0/R in zwei verschiedene Primideale, ebenso p in zwei verschiedene Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$. Sei weiter $\mathfrak{p}^a = (\pi)$ mit $a \not\equiv 0 \bmod.^+ l$ ein Hauptideal in Ω_0. Sei $\mathfrak{p} \mid \alpha_2$, dagegen α_1 und α_3 zu $\mathfrak{p}$ prim. Dann ist $p^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.*

Beweis, Unter den Voraussetzungen des Satzes ist $\pi^{l-1} \equiv 1 \bmod. l$. Wir setzen $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \zeta}{\alpha_1 + \alpha_2}$. Es wird $\alpha^{p^a - 1} \equiv 1 \bmod. \pi$. Daraus kann man, wie unter **6**, $\left(\frac{\alpha}{\pi^{l-1}}\right) = 1$ erschließen. Nullsetzen der Spur von $\frac{\alpha - 1}{\lambda} \frac{\pi^{l-1} - 1}{l} \bmod.^+ l$ gibt die Kongruenz:

$$\text{(i)} \qquad \frac{\pi^{l-1} - 1}{l} \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\pi'^{l-1} - 1}{l} \frac{\alpha_2'}{\alpha_3'} \equiv 0 \bmod.^+ l.$$

Analog folgt durch Ersetzung von α durch $\frac{\alpha_3 + \alpha_2 \zeta}{\alpha_3 + \alpha_2}$ die Kongruenz:

$$\text{(ii)} \qquad \frac{\pi^{l-1} - 1}{l} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\pi'^{l-1} - 1}{l} \frac{\alpha_2'}{\alpha_1'} \equiv 0 \bmod.^+ l.$$

I) Ist der Rang von $\mathfrak{A}$ (die Bezeichnungen sind dieselben wie unter **8**) $\bmod^+ l$ gleich 1, so gehen die Kongruenzen (i) und (ii) beide in $\frac{\pi^{l-1} - 1}{l} + \frac{\pi'^{l-1} - 1}{l} \equiv 0 \bmod.^+ l$ über, d. h. $\frac{(\pi\pi')^{l-1} - 1}{l} \equiv 0 \bmod.^+ l$. Wegen $\pi\pi' = \pm p^a$ gibt dies $p^{a(l-1)} \equiv 1 \bmod. l^2$, und daraus folgt wegen $a \not\equiv 0 \bmod.^+ l$ sofort $p^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.

II) Ist der Rang von $\mathfrak{A}$ $\bmod.^+ l$ gleich 2, so folgt aus den Kongruenzen (i) und (ii) sofort die Teilbarkeit der Zahlen $\frac{\pi^{l-1} - 1}{l}$ und $\frac{\pi'^{l-1} - 1}{l}$ durch $\mathfrak{l}_1$, ebenso durch $\mathfrak{l}_1' \neq \mathfrak{l}_1$, also durch l und damit ihrer Summe durch l. Der weitere Schluß ist wie bei I).

Nun folgen vor Anwendung dieser Kriterien auf besondere Werte von r und p einige Bemerkungen.

10a. *Für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ aus Ω_0 kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß höchstens ein α_i durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist.*

Beweis. Wir benützen die Abkürzung $\mathfrak{p}^a \parallel \xi$ für „$\mathfrak{p}$ geht genau zur a-ten Potenz in ξ auf".

Sei etwa $\mathfrak{p}^{m_i} \parallel \alpha_i$ und z. B. $m_2 = \max m_i$. Es folgt $m_1 = m_3$. Sei $\mathfrak{p}' \parallel \pi'$ (π' Primzahl nach $\mathfrak{p}'$), und zwar π' ganz und durch $\mathfrak{p}$ für den Fall $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ nicht teilbar. Setzen wir $\beta_i = \frac{\alpha_i \pi'^{m_1}}{N p^{m_1}}$, dann ist β_i ganz, $\sum_{i=1}^{3} \beta_i^l = 0$ und nur eventuell β_2 durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

10b. *Ist* $l \equiv 5 \bmod. 6$ *und bleibt* l *in* Ω_0 *nicht Primideal, so ist* $\alpha_1\alpha_1' \equiv \alpha_2\alpha_2' \equiv \alpha_3\alpha_3' \bmod. l$ *unmöglich.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt $\alpha_i' \equiv \frac{A}{\alpha_i} \bmod. \mathfrak{l}_1$, wo A als ganze rationale Zahl von i unabhängig angenommen werden kann. Wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0 \bmod.^+ \mathfrak{l}_1$ ergibt dies nach leichter Umformung von $\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' \equiv 0 \bmod.^+ \mathfrak{l}_1$ die Kongruenz $\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 \equiv 0 \bmod.^+ \mathfrak{l}_1$. Dies ist mit $l \equiv 5 \bmod.^+ 6$ unvereinbar, da wegen des Zerfallens von l in zwei (gleiche oder verschiedene) Primideale ersten Grades in Ω_0 der Restklassenkörper von $\mathfrak{l}_1$ isomorph zu Π_l ist.

11. *Es werde* 2 *in* Ω_0 *Quadrat eines Primideals*: $2 = \mathfrak{p}^2$. Dazu ist $m \equiv 2, 3 \bmod. 4$ notwendig und hinreichend. *Dann erfordert Fall* I *in* Ω_0 *die Kongruenz* $2^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.

Beweis. Da der Restklassenkörper von $\mathfrak{p}$ isomorph zu Π_2 ist, so ist ein α_i durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Nach **10a** können wir genau *ein* α_i als durch $\mathfrak{p}$ teilbar annehmen. Dann folgt der Satz aus **6.**

12. *Bleibe* 2 *in* Ω_0 *Primideal*, sei also $m \equiv 5 \bmod. 8$. *Es bleibe* $l \equiv 5 \bmod. 6$ *in* Ω_0/R *nicht Primideal*[10]). *Dann erfordert Fall* I *in* Ω_0 *die Kongruenz* $2^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.

Beweis. Sind nicht alle α_i zu 2 prim, so können wir nach **10a** genau eine der Zahlen α_i als durch 2 teilbar annehmen, und der Satz folgt aus **3.** Andernfalls sind die ganzen rationalen Zahlen $\alpha_i\alpha_i'$ alle drei ungerade, und der Satz folgt aus **5** im Verein mit **10b.**

13. *Für* $m \equiv 5 \bmod. 8$, $l = 3$ *ist Fall* I *in* Ω_0 *unmöglich.*

Beweis. Setzen wir eine entsprechende Gleichung voraus! Dann kann nach **10a** angenommen werden, daß höchstens ein α_i durch das Primideal 2 in Ω_0 teilbar ist. Es folgt aus **3**, daß alle α_i zu 2 prim sind, da die Kongruenz $2^2 \equiv 1 \bmod. 3^2$ unrichtig ist. Da der Restklassenkörper mod. 2 in Ω_0 der Körper der Charakteristik 2 mit vier Elementen oder das Galoisfeld $GF(2^2)$ ist, gilt somit $\alpha_i^3 \equiv 1 \bmod. 2$ für jedes i, und die Fermatsche Gleichung gibt schon als Kongruenz $\bmod.^+ 2$ betrachtet einen Widerspruch.

14. *Gilt* $2 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, *also* $m \equiv 1 \bmod. 8$, *zerfällt* l *in* Ω_0 *in zwei verschiedene Primideale und gilt von* $\mathfrak{p}$, *daß* $\mathfrak{p}^a$ *mit* $a \not\equiv 0 \bmod.^+ l$ *ein Hauptideal in* Ω_0 *ist, so erfordert Fall* I *in* Ω_0 *die Kongruenz* $2^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$.

Beweis. Nach **10a** können wir annehmen, daß höchstens ein α_i durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Wegen des Isomorphismus des Restklassenkörpers mod. $\mathfrak{p}$ mit Π_2 folgt die Teilbarkeit eines α_i durch $\mathfrak{p}$, und der Satz folgt aus **9.**

15. *Ist* $p = 2l + 1$ *Primzahl und in* Ω_0 *kritisch*, d. h. ist $p \mid m$, *so ist Fall* I *in* Ω_0 *unmöglich.*

Beweis. Setzen wir $p = \mathfrak{p}^2$, so ist der Restklassenkörper mod. $\mathfrak{p}$ zu Π_p isomorph, und es gilt $\alpha_i^l \equiv \pm 1 \bmod. \mathfrak{p}$ für jedes zu $\mathfrak{p}$ prime α_i. Hieraus folgt die Teilbarkeit mindestens eines α_i durch $\mathfrak{p}$. Nach **10a** können wir annehmen, daß die andern α_i zu $\mathfrak{p}$ prim sind. Dann folgt der Satz aus **6**, da $p^{l-1} \not\equiv 1 \bmod. l^2$ ist.

16. *Ist* $p = 2l + 1$ *Primzahl, zerfällt* p *in* Ω_0 : $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ *mit* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, *und ist* $\mathfrak{p}^a$ *mit* $a \not\equiv 0 \bmod.^+ l$ *ein Hauptideal, zerfällt endlich* l *in* Ω_0 *in zwei verschiedene Primideale, so ist Fall* I *in* Ω_0 *unmöglich.*

---

[10]) *Diese Einschränkungen über* l *sind hier in der Tat wesentlich.* Denn in $R(\sqrt{-3})$ bleibt 2 Primideal. Ist ϱ eine primitive dritte Einheitswurzel, so ist die Gleichung $(\varrho^2)^l + \varrho^l + 1 = 0$ für jede Primzahl $l > 3$ (sogar für jedes zu 3 prime ganze rationale l) erfüllt; man sieht leicht, daß die Einschränkungen über l die Annahme $\Omega_0 = R(\sqrt{-3})$ ausschließen.

Beweis. Genau wie in **15** erschließen wir, daß ohne Einschränkung der Allgemeinheit ein und nur ein α_i durch $\mathfrak{p}$ teilbar angenommen werden kann. Hieraus folgt der Satz nach **9**, da $p^{l-1} \not\equiv 1 \bmod. l^2$ ist.

17. *Ist* $3 \mid m$ *und* $l \equiv 5 \bmod. 6$, *so erfordert Fall* I *in* Ω_0, *falls* l *in* Ω_0 *nicht Primideal bleibt, die Kongruenz* $3^{l-1} \equiv 1 \bmod. l^2$ [11]).

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes wird 3 Quadrat eines Primideals in $\Omega_0 : 3 = \mathfrak{p}^2$. Da der Restklassenkörper mod. $\mathfrak{p}$ isomorph zu Π_3 ist, so ist entweder ein α_i durch $\mathfrak{p}$ teilbar und der Satz folgt aus **6**, oder alle Differenzen $\alpha_i - \alpha_j$ mit $i, j = 1, 2, 3$ sind durch $\mathfrak{p}$ teilbar, dann schließen wir nach **7** im Verein mit **10b**.

Wir bemerken noch, daß die unter **9**, **14**, **16** vorkommende Bedingung „$\mathfrak{p}^a$ mit $a \not\equiv 0 \bmod.^+ l$ ist Hauptideal“ sicher für $h_0 \not\equiv 0 \bmod.^+ l$ erfüllt ist.

[11]) Die Bedingungen „$l \equiv 5 \bmod. 6$, l bleibt nicht Primideal“ sind hier wieder *wesentlich*, um den Körper der dritten Einheitswurzeln als Ω_0 auszuschließen.

Eingegangen 10. Januar 1935.